

Cía. Editorial Continental

presenta la "SERIE COMPLEMENTARIA DE MATEMÁTICAS" de alta calidad didáctica en económicos ejemplares, dedicada a materias complementarias, auxiliares y en todos los niveles de la instrucción y educación.

La SERIE COMPLEMENTARIA DE MATEMÁTICAS consta de cuatro volúmenes, como sigue:

- Tomo I. FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA, por Howard W. Eves.
- Tomo II. FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA, por Howard W. Eves.
- Tomo III. INTRODUCCION A LAS TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS, por Howard H. Barry.
- Tomo IV. ALGEBRA VECTORIAL, por Richard E. Johnson.

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Tomo I

Esta obra, en dos volúmenes, ha sido diseñada para un curso preprofesional sobre las funciones clásicas de la variable compleja. También puede emplearse como texto complementario para cursos sobre análisis complejo.

El tratamiento es clásico, con énfasis superior al usual en la interpretación geométrica. Cualquier conocimiento que se requiera sobre la teoría de las funciones *reales* está incluido en el texto, con el propósito de hacerlo autosuficiente, con muchos ejemplos ilustrativos resueltos.

El AUTOR, Howard W. Eves, es profesor de matemáticas de la Universidad de Maine. Recibió su doctorado en Matemáticas en la Oregon State University.

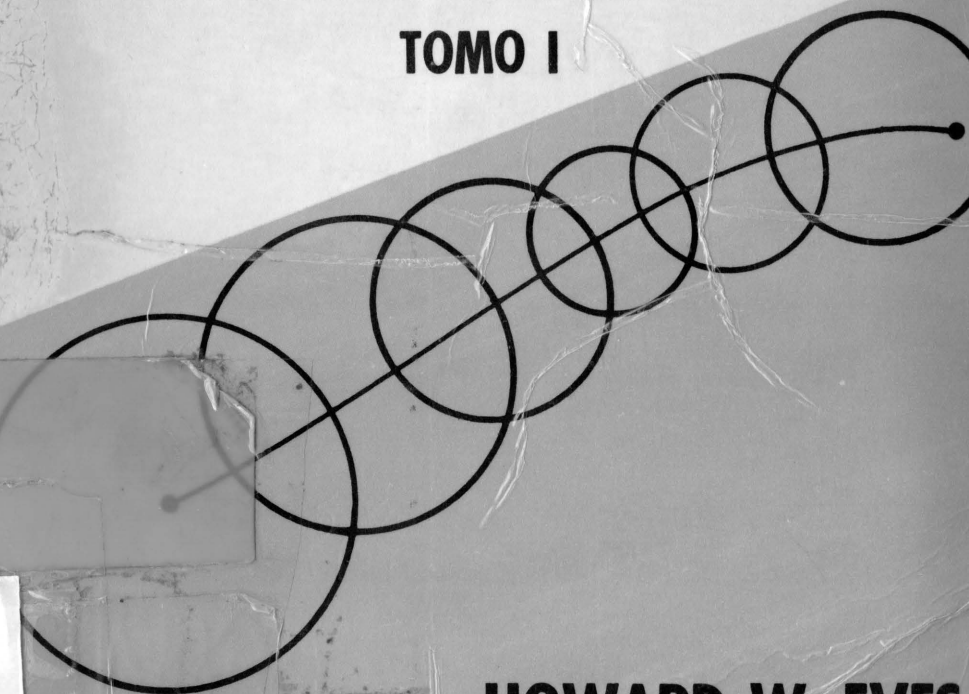
El doctor Eves es miembro de muchas sociedades profesionales, incluyendo la Société Mathématique de France, y el National Council of Teachers of Mathematics.

funciones

DE VARIABLE COMPLEJA

(FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE)

TOMO I



HOWARD W. EVES

SERIE COMPLEMENTARIA DE MATEMÁTICAS

Funciones de Variable Compleja

TOMO I

Por

HOWARD W. EVES

Universidad de Maine



COMPANÍA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.
MEXICO - ESPAÑA - ARGENTINA

SUCURSALES, DEPOSITOS Y REPRESENTACIONES EN:

Bolivia — Brasil — Colombia — Costa Rica — CHILE — Dominicana — Ecuador
El Salvador — Estados Unidos — Guatemala — Honduras — Nicaragua — Panamá
Paraguay — Perú — Puerto Rico — Uruguay — Venezuela

Título original en inglés:

FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE—Volume One

Traductores:

ARQ. JUAN ANTONIO TONDA e ING. EDUARDO TONDA MAGALLON

Edición autorizada por:

THE PRINDLE, WEBER & SCHMIDT, INC. — Boston, Mass.

© 1966 by Prindle, Weber & Schmidt, Incorporated

Library of Congress Catalog Card Number: 66-16013

Primera edición en español:

mayo de 1968

CALCULOS
517.8
E
1868

Derechos Reservados © en Lengua Española—1968, Primera Publicación

COMPANIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.

CALZADA DE TLALPAN NÚM. 4620, MÉXICO 22, D. F.

MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL

Registro Núm. 43

AV. REPÚBLICA ARGENTINA NÚM. 168, BARCELONA 6, ESPAÑA

ENTRE RÍOS NÚM. 1256, BUENOS AIRES, ARGENTINA

A B₁

Y ESOS MARAVILLOSOS DIAS DE HOPATCONG

QUE B₂ NUNCA OLVIDARA

Prefacio

Las siguientes notas son las de un curso para pregraduados avanzados y graduados de primer año en funciones de variable compleja impartido por el autor a lo largo de un periodo de varios años, hace casi un par de décadas. En aquel tiempo, los únicos textos disponibles sobre el tema eran esencialmente los de Burkhardt, Copson, Durège, Goursat, Harkness y Morley, MacRobert, Osgood, Pierpont, Titchmarsh y Townsend. Como ninguno de estos textos —aun cuando grandes para su época y con frecuencia todavía útiles— se adaptaba completamente al plan del curso, se desarrollaron las siguientes notas. Un buen número de estudiantes aprendieron la teoría de función compleja de estos apuntes, y fueron lo suficientemente amables para expresar admiración por ellos. La admiración se extendió hasta algunos otros instructores quienes, a su vez, también los usaron. Y hoy en día hay muchos estudiantes que piden copias para complementar un curso actual sobre el tema. El resultado es que ha habido apremio por parte de un número de estudiantes e instructores para que estas notas sean publicadas; y después de muchas dudas y considerable renuencia, el autor ha consentido.

Las dudas y la renuencia provienen de la naturaleza clásica y de la forma de esqueleto de los apuntes. Por supuesto el núcleo del tema aún reside en el desarrollo clásico, pero a través de los años transcurridos han habido embellecimientos y refinamientos en la teoría de funciones y varios buenos textos modernos han aparecido. No sólo han mejorado un número de demostraciones y enfoques a través de los años, sino que hoy, en un curso de teoría de funciones complejas, se puede hacer un uso más inteligente y mejor de conceptos de topología y álgebra abstractas. Un curso de teoría de funciones complejas impartido hoy por el autor se apoya en el trabajo de Caratéodoro y difiere de manera importante del que inició hace casi dos décadas. Pero reescribir las notas para ponerlas al día, o siquiera para rellenar su forma de esqueleto y hacer de ellas

un libro terminado, significaría mucho más tiempo y energía de los que dispone el autor. Por otra parte, en realidad han habido instancias para que las notas se conserven esencialmente en su forma original clásica y de esqueleto, pues éstas son características que los usuarios desean ver preservadas. Así es que aquí están un poco podadas y alteradas, pero en gran parte tal como fueron formuladas inicialmente. Ojalá que puedan proporcionar placer matemático a algunos y material y enfoques suplementarios a otros.

El amor del autor por la teoría de funciones, fue despertado y alimentado por las magistrales exposiciones hechas por el Prof. David Vernon Widder, de la Universidad de Harvard. Cualquier característica valiosa de estas notas, indudablemente le debe algo a esas notables disertaciones de antaño.

HOWARD EVES

Contenido

CAP.	PÁGS.
1. NUMEROS COMPLEJOS	11
Un álgebra de parejas ordenadas de números reales	11
La notación $a + ib$	13
Una representación geométrica de números complejos.....	13
2. POLINOMIOS COMPLEJOS	19
Derivadas	19
Ceros	22
Fronteras para valores absolutos de ceros	24
Continuidad	26
3. FUNCIONES RACIONALES	29
4. PROYECCION ESTEREOGRAFICA	33
5. TRANSFORMACIONES BILINEALES	39
Transformación racional integral lineal	39
Transformación de inversión	42
Transformación bilineal	47
Puntos fijos de una transformación bilineal	55
Clasificación de transformaciones bilineales	59
Relación cruzada	68
Proyectando planimétricamente el círculo unitario en una línea recta	71
6. LA FUNCION $Z' = Z^n$, n UN ENTERO POSITIVO	73
Funciones automorfas	73
La transformación $z' = z^2$	74
Funciones monogénicas	79
La transformación $z' = z^n$, n un entero positivo	80
7. SUPERFICIES DE RIEMANN	81
Definiciones	81
Funciones algebraicas simples en superficies de Riemann..	81

8. FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL	97
Funciones	97
Límites	101
Continuidad	106
Derivadas	110
Teoremas de valor medio para una variable	114
Funciones de dos variables	117
Derivadas direccionales	126
Integrales lineales	135
Teoría elemental de conjuntos de puntos	138
9. FUNCIONES ANALITICAS DE VARIABLE COMPLEJA.....	145
Funciones, límites, continuidad	145
Diferenciabilidad	149
Funciones analíticas	152
10. FUNCIONES TRASCENDENTES ELEMENTALES	157
Exponenciales y logarítmicas	157
Trigonómicas y trigonométricas inversas	165
11. INTEGRACION	181
Integrales lineales complejas	181
Teorema de Cauchy	187
Dominios anulares	191
Fórmula de la integral de Cauchy	197
Desigualdad de Cauchy	206
Expansión de Taylor	212
Ceros	222
Problemas para Capítulos del 1 al 11	227
Índice	245

CAPITULO 1

Números Complejos

UN ALGEBRA DE PAREJAS ORDENADAS
DE NUMEROS REALES

1.01. Definición. Designaremos al conjunto de todas las parejas ordenadas (a, b) de números reales a y b por C .

1.02. Definición. Si (a, b) y (c, d) son dos miembros de C , decimos que $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Observación: Nótese que, por definición, la igualdad de miembros de C es una identidad.

1.03. Definición. Definiremos la *suma* de dos miembros cualesquiera (a, b) y (c, d) de C , tomados en ese orden, como la pareja ordenada de números reales $(a + c, b + d)$, y escribimos.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Esta operación binaria en miembros de C será llamada *adición*.

1.04. Teorema. C es cerrada en adición, que es conmutativa y asociativa.

1.05. Definición. Definimos el *producto* de dos miembros cualesquiera (a, b) y (c, d) de C , tomados en este orden, como la pareja ordenada de números reales $(ac - bd, ad + bc)$, y escribimos

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Esta operación binaria de miembros de C será llamada *multiplicación*.

1.06. Teorema. C es cerrada en multiplicación, que es conmutativa, asociativa y distributiva en la adición.

Demostración: La conclusión y la ley conmutativa son obvios. Para establecer las otras dos leyes, establecemos $\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2)$, $\gamma = (c_1, c_2)$. Entonces

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)\gamma &= \{(a_1b_1 - a_2b_2)c_1 - (a_1b_2 + a_2b_1)c_2, (a_1b_1 - a_2b_2)c_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)c_1\} \\ &= \{a_1b_1c_1 - a_2b_2c_1 - a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_1b_1c_2 - a_2b_2c_2 + a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1\} \\ &= \{a_1(b_1c_1 - b_2c_2) - a_2(b_2c_1 + b_1c_2), a_1(b_1c_2 + b_2c_1) + a_2(b_1c_1 - b_2c_2)\} \\ &= \alpha(\beta\gamma). \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} \alpha(\beta + \gamma) &= \{a_1(b_1 + c_1) - a_2(b_2 + c_2), a_1(b_2 + c_2) + a_2(b_1 + c_1)\} \\ &= (a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1c_1 - a_2c_2, a_1c_2 + a_2c_1) \\ &= \alpha\beta + \alpha\gamma. \end{aligned}$$

1.07. Teorema. Si (a, b) es cualquier miembro de C , entonces $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$.

1.08. Teorema. Si (a, b) es cualquier miembro de C , entonces $(a, b)(1, 0) = (a, b)$.

1.09. Teorema. Si (a, b) es cualquier miembro de C , entonces $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$.

1.10. Teorema. Si (a, b) es cualquier miembro de C diferente de $(0, 0)$, entonces

$$(a, b)(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2)) = (1, 0).$$

1.11. Definición. Los elementos de C , sujetos a las Definiciones 1.02, 1.03 y 1.05, serán llamados *números complejos*.

1.12. Teorema. El conjunto de todos los números complejos constituye un campo.

1.13. Nota. Podríamos haber definido el conjunto de todos los números complejos como el conjunto de todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

donde a y b son números reales, sujetos a las definiciones usuales de igualdad, adición y multiplicación de matrices.

LA NOTACION $a + ib$

1.14. Teorema. Los números complejos $(a, 0)$ y los números reales a son isomorfos en relación con las operaciones de adición y multiplicación.

Observación: Debido al isomorfismo del Teorema 1.14, los números reales están enclavados dentro de los números complejos, y el conjunto de los números complejos forma así una extensión del conjunto de los números reales.

1.15. Convención. De aquí en adelante representaremos al número complejo $(a, 0)$ simplemente por a .

1.16. Definición. Representaremos al número complejo $(0, 1)$, por i .

1.17. Teorema. $i^2 = -1$.

1.18. Teorema. $(0, b) = ib$.

1.19. Teorema. $(a, b) = a + ib$.

1.20. Teorema. Cuando usamos la notación $a + ib$ para el número complejo (a, b) , podemos efectuar adición y multiplicación como con polinomios en i , siempre y cuando reemplacemos i^2 , cuando ocurra, por -1 .

UNA REPRESENTACION GEOMETRICA DE NUMEROS COMPLEJOS

1.21. La representación. Representamos el número complejo $z = x + iy$ como el punto (x, y) en un sistema Cartesiano rectangular de referencia (véase Fig. 1.1). Al eje x se le llama el *eje de los reales* y al eje y se le llama el *eje de los imaginarios*.

1.22. Definición. Establecemos $|z| = r = +\sqrt{x^2 + y^2}$ y lo llamamos el *valor absoluto* (o módulo) de z . A $|z|^2$ se le llama norma de z . Cualquier ángulo θ tal que $\sin \theta = y/r$ y $\cos \theta = x/r$ es llamado *amplitud* (o argumento) de z . El valor de θ tal que $-\pi < \theta \leq \pi$ es llamado la *amplitud principal* de z .

1.23. Teorema. Dos amplitudes cualesquiera de z difieren en un múltiplo de 2π .

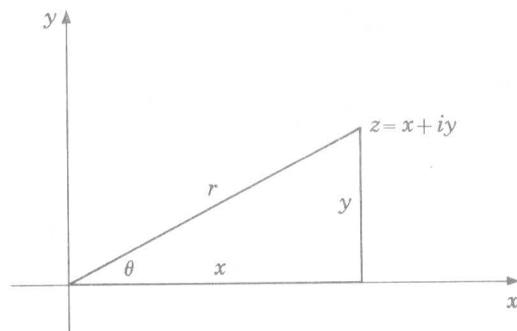


FIGURA 1.1

1.24. Teorema. Cualquier número complejo $x + iy$ puede ser escrito en forma polar

$$r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

o, más corto, como

$$r \operatorname{cis} \theta.$$

1.25. Definición. El número complejo $x - iy$ es llamado el *conjugado* del número complejo $x + iy$. Si $z = x + iy$, establecemos

$$\bar{z} = x - iy.$$

1.26. Teorema. $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$; $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$; $\overline{(\alpha/\beta)} = \bar{\alpha}/\bar{\beta}$.

1.27. Teorema. Geométricamente, z y $\bar{z}$ son reflexiones entre sí en el eje de los reales.

1.28. Teorema. $|z|^2 = z\bar{z}$.

1.29. Notación. Designamos la *parte real* x de $z = x + iy$ por $\operatorname{Rl} z$, y la *parte imaginaria* y por $\operatorname{Im} z$.

1.30. Teorema. $2 \operatorname{Rl} z = z + \bar{z}$; $2i \operatorname{Im} z = z - \bar{z}$.

1.31. Representación geométrica de la adición. Como se indica en la Fig. 1.2, conectemos los dos puntos dados α y β con el origen por medio de líneas rectas y completemos el paralelogramo así determinado. El cuarto vértice es entonces el punto $\alpha + \beta$.

Nota: Las leyes conmutativa y asociativa de adición se siguen fácilmente de esta construcción.

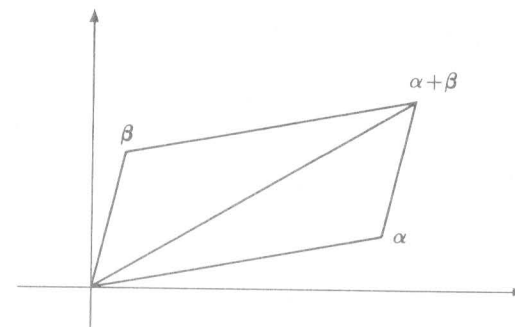


FIGURA 1.2

1.32. Teorema $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Demostración: Esto se sigue del teorema elemental de la geometría que dice que en cualquier triángulo cualquier lado no es mayor que la suma ni menor que la diferencia de los otros dos.

Alternativa: Para

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta|^2 &= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) && \text{por los Arts. 1.28 y 1.26} \\ &= \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta} \\ &= |\alpha|^2 + 2 \operatorname{Rl}(\alpha\bar{\beta}) + |\beta|^2 && \text{por los Arts. 1.28 y 1.30} \\ &\leq |\alpha|^2 + 2|\alpha\bar{\beta}| + |\beta|^2 \\ &= (|\alpha| + |\beta|)^2, \end{aligned}$$

de donde

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta|^2 &= |\alpha|^2 - 2 \operatorname{Rl}(\alpha\bar{\beta}) + |\beta|^2 \\ &\geq |\alpha|^2 - 2|\alpha\bar{\beta}| + |\beta|^2 \\ &= (|\alpha| - |\beta|)^2, \end{aligned}$$

de donde

$$|\alpha - \beta| \geq ||\alpha| - |\beta||.$$

Ahora reemplacemos β por $-\beta$ y usemos el hecho de que $|\beta| = |-\beta|$.

Alternativa: Hagamos $\alpha = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$, y $\beta = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$. Entonces

$$\alpha + \beta = (r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2) + i(r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2),$$

de donde

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta| &= \{(r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2)^2 + (r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2)^2\}^{1/2} \\ &= \{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\}^{1/2} \\ &\leq \{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Así tenemos

$$|\alpha + \beta| \leq r_1 + r_2 = |\alpha| + |\beta|.$$

1.33. Teorema. $|a| + |b| \leq \sqrt{2} |a + ib|.$

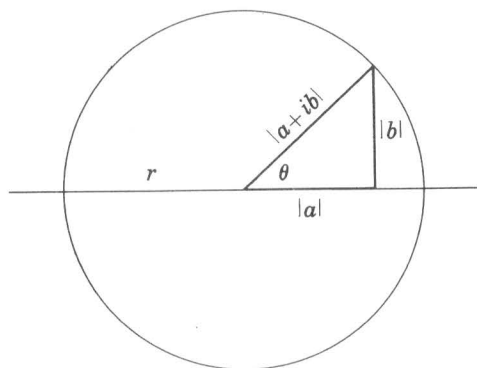


FIGURA 1.3

Demostración: Véase la Fig. 1.3. Tenemos

$$|a| + |b| = r(|\cos \theta| + |\sin \theta|).$$

Diferenciando con respecto a θ para encontrar el máximo, tenemos

$$r(-|\sin \theta| + |\cos \theta|) = 0,$$

de donde

$$|\sin \theta| = |\cos \theta|,$$

o

$$|a| = |b| = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{|a + ib|}{\sqrt{2}}.$$

1.34. Sustracción geométrica. Para encontrar $\alpha - \beta$, conectemos α y β con el origen por medio de líneas rectas y completemos el

paralelogramo teniendo α y el origen como extremos de una diagonal. Entonces el cuarto vértice es $\alpha - \beta$ (véase Fig. 1.4).

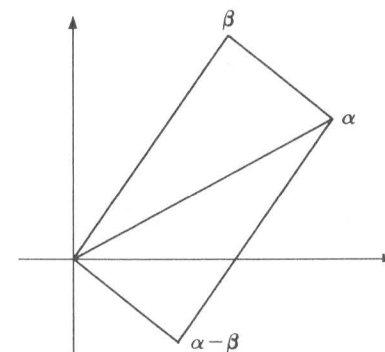


FIGURA 1.4

1.35. Multiplicación geométrica. Véase la Fig. 1.5. Para encontrar el producto de α y β , construimos el triángulo $0\beta\gamma$ directamente similar al 01α ; entonces $\gamma = \alpha\beta$.

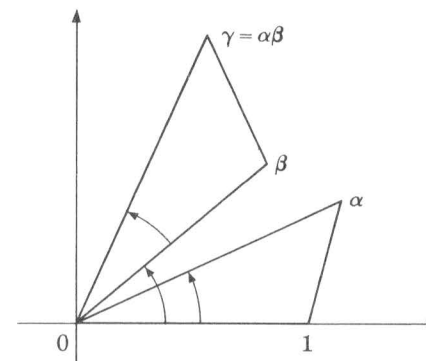


FIGURA 1.5

Demostración: Sea

$$\alpha = m(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \beta = n(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= mn[(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) + i(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi)] \\ &= mn[\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)]. \end{aligned}$$

Así, si $\gamma = \alpha\beta$, tenemos

$$|\gamma| = |\alpha||\beta| \quad \text{y} \quad \text{arco } \gamma = \text{arco } \alpha + \text{arco } \beta.$$

De la Fig. 1.5 apreciamos que la segunda condición se cumple, y de triángulos semejantes tenemos

$$|\gamma| = 0\gamma = \frac{(0\alpha)(0\beta)}{01} = |\alpha||\beta|,$$

de donde la primera condición también se cumple.

1.36. División geométrica. Véase la Fig. 1.6. Para encontrar el cociente β/α , $\alpha \neq 0$, construimos el triángulo $0\beta\gamma$ directamente similar al $0\alpha 1$; entonces $\gamma = \beta/\alpha$.

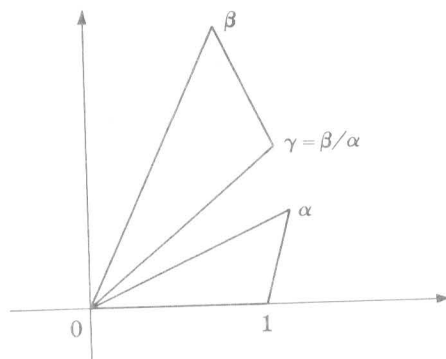


FIGURA 1.6

CAPITULO 2

Polinomios Complejos

DERIVADAS

2.01. Definiciones. Un *polinomio complejo* en z es una expresión formada por un número finito de adiciones y multiplicaciones ejecutadas sobre z y cualesquiera constantes complejas.

En consecuencia, cualquier polinomio complejo puede ser escrito como

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \equiv \sum_{l=0}^n a_l z^{n-l}.$$

- (a) Si $a_0 \neq 0$, entonces n es el *grado* del polinomio $f(z)$.
- (b) Si $f(z) \equiv a_n \neq 0$, entonces el grado del polinomio se dice que es cero.
- (c) Si $f(z) \equiv 0$, entonces el grado no está definido.

2.02. Definición. La definición general de derivada será dada más tarde. Mientras tanto, para el propósito del estudio de polinomios, definimos la *derivada* k -ésima de $f(z)$ como

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &\equiv k! \left\{ a_0 \binom{n}{k} z^{n-k} + a_1 \binom{n-1}{k} z^{n-k-1} + \cdots + a_{n-k} \right\} \\ &= k! \sum_{l=0}^n a_l \binom{n-l}{k} z^{n-k-l}. \end{aligned} \quad (1)$$

En particular, para $f(z) = \sum_{l=0}^n a_l z^{n-l}$, tenemos

$$f'(z) = \sum_{l=0}^n (n-l) a_l z^{n-l-1}. \quad (2)$$

Nota: $\binom{a}{b} \equiv \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-b+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots b}.$

2.03. Teorema. Si h es compleja, entonces

$$f(z_0 + h) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(z_0) \frac{h^k}{k!}.$$

Demostración: Para

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) &\equiv a_0(z_0 + h)^n + a_1(z_0 + h)^{n-1} + \cdots + a_n \\ &\equiv a_0 \left\{ z_0^n + \binom{n}{1} z_0^{n-1} h + \cdots + \binom{n}{n} h^n \right\} \\ &\quad + a_1 \left\{ z_0^{n-1} + \binom{n-1}{1} z_0^{n-2} h + \cdots + \binom{n-1}{n-1} h^{n-1} \right\} \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + a_{n-1} \{ z_0 + h \} \\ &\quad + a_n \end{aligned}$$

debido a que el teorema binomial para exponentes integrales positivos ciertamente se mantiene para números complejos

$$\equiv f(z_0) + f'(z_0)h + f''(z_0)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(z_0)\frac{h^n}{n!}$$

(por el Art. 2.03)

$$\equiv \sum_{k=0}^n f^{(k)}(z_0) \frac{h^k}{k!}.$$

2.04. Teorema. $f(z) \equiv \sum_{k=0}^n f^{(k)}(z_0) \frac{(z - z_0)^k}{k!}.$

En el Art. 2.03 poner $h = z - z_0$.

2.05. Teorema. $(az^n)' = naz^{n-1}.$

Demostración: Por (2) del Art. 2.02.

2.06. Teorema. $\{f(z) + \phi(z)\}' = f'(z) + \phi'(z).$

Hagamos que los grados de $f(z)$ y $\phi(z)$ sean n_1 y n_2 y tomemos $n = \max(n_1, n_2)$. Entonces tenemos

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}, \quad \phi(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^{n-k},$$

y

$$f(z) + \phi(z) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) z^{n-k},$$

donde algunos de los coeficientes pueden ser cero. Ahora

$$\begin{aligned} \{f(z) + \phi(z)\}' &= \sum_{k=0}^n (n-k)(a_k + b_k) z^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n (n-k)a_k z^{n-k-1} + \sum_{k=0}^n (n-k)b_k z^{n-k-1} \\ &= f'(z) + \phi'(z). \end{aligned}$$

2.07. Teorema. $\{f(z)\phi(z)\}' = f(z)\phi'(z) + f'(z)\phi(z).$

Demostración: Por el Art. 2.03, el miembro de la izquierda es el coeficiente de h en el producto

$$f(z+h)\phi(z+h).$$

Pero por el Art. 2.03, este producto es

$$[f(z) + f'(z)h + \cdots][\phi(z) + \phi'(z)h + \cdots],$$

y el coeficiente en cuestión es

$$f(z)\phi'(z) + f'(z)\phi(z).$$

En consecuencia, hemos demostrado el teorema.

2.08. Teorema. $\{f^{(k-1)}(z)\}' = f^{(k)}(z).$

Demostración: Por (1) del Art. 2.02, tenemos

$$f^{(k-1)}(z) = (k-1)! \sum_{l=0}^n a_l \binom{n-l}{k-1} z^{n-k+1-l}.$$

En consecuencia, por (2) del Art. 2.02,

$$\begin{aligned} \{f^{(k-1)}(z)\}' &= (k-1)! \sum_{l=0}^n (n-k+1-l) a_l \binom{n-l}{k-1} z^{n-k-l} \\ &= (k-1)! \sum_{l=0}^n (n-k+1-l) \binom{n-l}{k} \frac{k}{n-k+1-l} a_l z^{n-k-l} \\ &= k! \sum_{l=0}^n a_l \binom{n-l}{k} z^{n-k-l} \\ &= f^{(k)}(z). \end{aligned}$$

Nota: Usamos la relación

$$\binom{r}{s-1} = \frac{s}{r-s+1} \binom{r}{s}.$$

CEROS

2.09. Definición. z_0 es un *cero* del polinomio $f(z)$ si y sólo si $f(z_0) = 0$.

2.10. Teorema. El polinomio $f(z)$ es divisible por $z - z_0$ si y sólo si $f(z_0) = 0$, o lo que es lo mismo, si y sólo si z_0 es un cero de $f(z)$.

Demostración. Expandiendo el Art. 2.04, tenemos

$$f(z) \equiv f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + f''(z_0) \frac{(z - z_0)^2}{2!} + \cdots + a_n \frac{(z - z_0)^n}{n!}.$$

Ahora el miembro de la derecha, y en consecuencia el miembro de la izquierda, tendrán el mismo factor $z - z_0$ si y sólo si $f(z_0) = 0$.

2.11. Suposición. Cualquier polinomio de grado $n > 0$ tiene por lo menos un cero.

Demostración: Demostraremos este teorema más adelante (Art. 11.36).

2.12. Teorema. Un polinomio de grado n tiene cuando más n ceros distintos.

Demostración: Por el Art. 2.11, $f(z)$ tiene por lo menos un z_1 cero. En consecuencia, por el Art. 2.10,

$$f(z) = (z - z_1)f_1(z),$$

donde $f_1(z)$ es un polinomio de grado $n - 1$. Otra vez, por el Art. 2.11, $f_1(z)$ tiene un z_2 cero. En consecuencia, por el Art. 2.10,

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)f_2(z),$$

donde $f_2(z)$ es un polinomio de grado $n - 2$. Procediendo en esta forma, obtenemos

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)f_n, \quad (1)$$

donde f_n es una constante diferente de cero. Ahora, de (1) es obvio que cualquiera de los posibles números distintos $z_1, z_2, \dots, z_n$ es un cero de $f(z)$. No puede haber más de n ceros distintos porque entonces el grado de $f(z)$ sería mayor de n .

2.13. Definición. Decimos que z_0 es un *cero de orden k* del polinomio $f(z)$ si $f(z)$ es divisible por $(z - z_0)^k$ pero no por $(z - z_0)^{k+1}$.

2.14. Teorema. z_0 es un cero de orden k de $f(z)$ si y sólo si

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Demostración: Esto se sigue de la expansión en el Art. 2.10.

2.15. Teorema. Si $z_1, z_2, \dots, z_r$ son ceros distintos de órdenes $k_1, k_2, \dots, k_r$ respectivamente, de $f(z)$, y si no hay otros ceros entonces

$$f(z) = (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_r)^{k_r} a_0, \quad a_0 \neq 0,$$

y $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$, el grado de $f(z)$.

Demostración: Por el Art. 2.14, tenemos

$$f(z) = (z - z_1)^{k_1} f_1(z), \quad (1)$$

donde $f_1(z_1) \neq 0$, porque de otra manera z_1 sería un cero de orden mayor que k_1 . Como z_2 es un cero de $f(z)$, tenemos, de (1),

$$f(z_2) = 0 = (z_2 - z_1)^{k_1} f_1(z_2).$$

Pero $z_2 \neq z_1$, y en consecuencia tenemos

$$f_1(z_2) = 0.$$

Ahora de (1), por Arts. 2.07 y 2.05,

$$f'(z) = (z - z_1)^{k_1} f_1'(z) + k_1(z - z_1)^{k_1-1} f_1(z), \quad (2)$$

por consiguiente, por el Art. 2.14,

$$f'(z_2) = (z_2 - z_1)^{k_1} f_1'(z_2) = 0.$$

Una vez más, de (2) y usando los Arts. 2.06 y 2.08,

$$f''(z) = (z - z_1)^{k_1} f_1''(z) + k_1(z - z_1)^{k_1-1} f_1'(z) + k_1(k_1 - 1)(z - z_1)^{k_1-2} f_1(z),$$

de lo cual, por el Art. 2.14,

$$f''(z_2) = (z_2 - z_1)^{k_1} f_1''(z_2) = 0.$$

Continuando este proceso, encontramos

$$f_1(z_2) = f_1'(z_2) = \cdots = f_1^{(k_2-1)}(z_2) = 0, \quad f_1^{(k_2)}(z_2) \neq 0.$$

En consecuencia, por 2.14, z_2 es un cero de orden k_2 de $f_1(z)$, y tenemos

$$f_1(z) = (z - z_2)^{k_2} f_2(z),$$

o, sustituyendo en (1),

$$f(z) = (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} f_2(z), \quad f_2(z_2) \neq 0.$$

Siguiendo el mismo proceso anterior, finalmente obtenemos

$$f(z) = (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_r)^{k_r} f_r(z), \quad (3)$$

donde

$$f_r(z_1) \neq 0, f_r(z_2) \neq 0, \dots, f_r(z_r) \neq 0.$$

Ahora tomemos cualquier otro punto z_0 que no sea $z_1, \dots, z_r$. Entonces z_0 , por hipótesis, no es un cero de $f(z)$. En consecuencia

$$f(z_0) = (z_0 - z_1)^{k_1} (z_0 - z_2)^{k_2} \cdots (z_0 - z_r)^{k_r} f_r(z_0) \neq 0.$$

En consecuencia

$$f_r(z_0) \neq 0,$$

y así, no desvaneciéndose para cualquier otro punto z_0 , $f_r(z)$ debe ser de grado 0, o lo que es lo mismo, alguna constante $a_0 \neq 0$.

Finalmente, igualando grados en ambos lados de (3), vemos que

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n,$$

donde n es el grado de $f(z)$.

2.16. Convenio. De aquí en adelante convendremos en considerar un cero de orden k como k ceros iguales.

2.17. Teorema. Un polinomio de grado n tiene exactamente n ceros.

Demostración: Usar los Arts. 2.12, 2.15 y 2.16.

FRONTERAS PARA VALORES ABSOLUTOS DE CEROS

2.18. Teorema. Si $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ ($a_0 \neq 0$), y si $|a_k/a_0| \leq M$, $k = 1, 2, \dots, n$, y si $f(z_0) = 0$, entonces

$$|z_0| < M + 1.$$

Demostración:

Caso 1: $M = 0$. Aquí debemos tener $a_k = 0$, ($k = 1, \dots, n$). En consecuencia $z_0 = 0$ y el teorema es obvio.

Caso 2: $M \neq 0$. Tenemos

$$f(z) - a_0 z^n = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n,$$

o, como $a_0 \neq 0$,

$$\frac{f(z) - a_0 z^n}{a_0} = \frac{a_1}{a_0} z^{n-1} + \frac{a_2}{a_0} z^{n-2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z) - a_0 z^n}{a_0} \right| &\leq \left| \frac{a_1}{a_0} \right| |z|^{n-1} + \left| \frac{a_2}{a_0} \right| |z|^{n-2} + \cdots + \left| \frac{a_n}{a_0} \right| \\ &\leq M \{ |z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \cdots + 1 \} \\ &\leq \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} M. \end{aligned} \quad (1)$$

Ahora supongamos que z es un punto tal que $|z| \geq M + 1$. Entonces

$$|z| - 1 \geq M > 0,$$

o, como $|z| \neq 1$,

$$\frac{M}{|z| - 1} \leq 1. \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), tenemos

$$\left| \frac{f(z) - a_0 z^n}{a_0} \right| \leq |z|^n - 1 < |z|^n;$$

o lo que es igual,

$$|f(z) - a_0 z^n| < |z|^n |a_0|.$$

Ahora z no puede ser un cero z_0 de $f(z)$, porque si fuera, tendríamos

$$|f(z_0) - a_0 z_0^n| < |z_0|^n |a_0|,$$

o

$$|a_0 z_0^n| < |z_0|^n |a_0|,$$

un absurdo. Esto demuestra el teorema.

Nota: Geométricamente, este teorema establece que si dibujamos un círculo con el origen como centro y de radio igual a $M + 1$, entonces cualquier cero z_0 de $f(z)$ debe caer en el interior de este círculo.

2.19. Teorema. Si $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, ($a_n \neq 0$), y si $|a_k/a_n| \leq m$, ($k = 0, 1, \dots, n-1$), y si $f(z_0) = 0$, entonces

$$|z_0| > \frac{1}{m+1}.$$

Demostración: Hacemos $z = 1/\xi$. Entonces

$$f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{1}{\xi^n} \{a_0 + a_1 \xi + \dots + a_n \xi^n\} \equiv \frac{1}{\xi^n} \phi(\xi).$$

Demostración: Ahora, si $f(z_0) = 0$, entonces $z_0 \neq 0$, para, por hipótesis, $a_n \neq 0$. Entonces $1/\xi_0 \neq 0$, debemos tener $\phi(\xi_0) = 0$. Por el Art. 2.18,

$$|\xi_0| < m + 1.$$

Por lo tanto

$$|z_0| > \frac{1}{m+1}.$$

Nota: Geométricamente este teorema establece que si dibujamos un círculo con el origen como centro y de radio igual a $1/(m+1)$, entonces cualquier cero z_0 de $f(z)$ caerá en el exterior de este círculo. Así los Arts. 2.18 y 2.19 limitan la posición de z_0 a algún lugar en un anillo de radio interior $1/(m+1)$ y de radio exterior $M+1$.

2.20. Teorema. Si $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_l z^{n-l}$, ($a_l \neq 0$), y si $|a_k/a_l| \leq m$, ($k = 0, 1, \dots, l-1$), y si $f(z_0) = 0$, ($z_0 \neq 0$), entonces

$$|z_0| > 1/(m+1).$$

Demostración: La demostración se sigue inmediatamente del Art. 2.19.

CONTINUIDAD

2.21. Definiciones. (a) $z \rightarrow 0$ si y sólo si $|z| \rightarrow 0$.
(b) $z \rightarrow z_0$ si y sólo si $|z - z_0| \rightarrow 0$.

2.22. Teorema. Si $f(z_0) = 0$, entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$.

Demostración: Tenemos

$$f(z) = (z - z_0)\phi(z), \quad (1)$$

donde $\phi(z) \equiv b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-1}$, digamos. De (1) tenemos

$$|f(z)| = |z - z_0| |\phi(z)|. \quad (2)$$

Pero

$$|\phi(z)| \leq |b_0| |z|^{n-1} + |b_1| |z|^{n-2} + \dots + |b_{n-1}|.$$

Ahora consideremos aquellos valores de z tales que

$$|z| \leq |z_0| + \delta,$$

donde δ es cualquier número positivo dado. Para dicha z tenemos

$$|\phi(z)| \leq |b_0|(|z_0| + \delta)^{n-1} + \dots + |b_{n-1}|. \quad (3)$$

En consecuencia, llamando al miembro de la derecha de (3) M , tenemos, de (2) y por el Art. 1.30,

$$|f(z)| \leq |z - z_0| M \leq (|z| - |z_0|) M = \delta M,$$

donde M es independiente de z . Por lo tanto

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = 0,$$

de lo cual

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0.$$

2.23. Teorema. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Demostración: El polinomio $f(z) - f(z_0)$ obviamente tiene el cero z_0 . En consecuencia, por el Art. 2.22,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - f(z_0)| = 0,$$

o, por el Art. 2.21, Definición (b),

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Nota: Este teorema demuestra que cualquier polinomio complejo es *continuo* en todos los puntos.

CAPITULO 3

Funciones Racionales

3.01. Definiciones. Una expresión obtenida por un número finito de adiciones, multiplicaciones y divisiones sobre z y constante complejas, es llamada una *función racional*.

En consecuencia, cualquier función racional puede ser escrita como

$$W(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m} = \frac{f(z)}{g(z)}, \quad a_0 \neq 0, b_0 \neq 0,$$

y claramente está definida para todos los valores de z excepto los ceros de $g(z)$.

Si $f(z)$ y $g(z)$ no tienen factor no constante común, entonces $W(z)$ se dice que está *reducido*.

3.02. Definición. Decimos que $z \rightarrow \infty$ si y sólo si $|z| \rightarrow \infty$.

3.03. Teorema. Si $z = 1/\xi$, entonces $z \rightarrow \infty$ si y sólo si $\xi \rightarrow 0$.

Demostración: $|z| = 1/|\xi|$.

3.04. Exposición. Si una función racional $W(z)$ está en forma reducida, entonces con respecto a $W(z)$ sólo hay tres tipos de puntos en el plano.

(1) z_1 , cualquier punto que no sea un cero de $f(z)$ o $g(z)$.

$$W(z_1) = \frac{f(z_1)}{g(z_1)} \neq 0,$$

y

$$\lim_{z \rightarrow z_1} W(z) \neq 0, \infty.$$

(2) z_1^0 , cualquier punto que es cero de $f(z)$ pero no lo es de $g(z)$.

$$W(z) = (z - z_1^0)^k \frac{f_1(z)}{g(z)},$$

donde para $f_1(z)/g(z)$ el punto z_1^0 es del tipo (1). Aquí

$$\lim_{z \rightarrow z_1^0} W(z) = 0.$$

(3) z_1^r , cualquier punto que es un cero de $g(z)$, pero no lo es de $f(z)$.

$$W(z) = \frac{1}{(z - z_1^r)^k} \frac{f(z)}{g_1(z)},$$

donde para $f(z)$ el punto z_1^r es del tipo (1). Aquí

$$|W(z)| = \frac{1}{|z - z_1^r|^k} \left| \frac{f(z)}{g_1(z)} \right|,$$

de lo cual

$$\lim_{z \rightarrow z_1^r} W(z) = \infty.$$

3.05. Definiciones. (a) z_1^0 está definido como un *cero* de

$W(z)$ de orden k si $W(z) = (z - z_1^0)^k \frac{f_1(z)}{g(z)}$, donde $\frac{f_1(z_1^0)}{g(z_1^0)} \neq 0, \infty$.

(b) z_1^r se define como un *polo* de $W(z)$ de orden k si

$$W(z) = \frac{1}{(z - z_1^r)^k} \frac{f(z)}{g_1(z)}, \text{ donde } \frac{f(z_1^r)}{g_1(z_1^r)} \neq 0, \infty.$$

(c) Si el numerador de $W(z)$ es un polinomio de grado n y el denominador uno de grado m , entonces $W(z)$ tiene n ceros y m polos. (Ni los ceros ni los polos son necesariamente todos distintos.)

(d) $\max(m, n)$ es llamado el *grado* de $W(z)$ cuando $W(z)$ está reducida.

3.06. Teorema. $\lim_{z \rightarrow \infty} W(z) = \infty, a_0/b_0$, o 0 cuando n es mayor, igual o menor que m .

3.07. Definición. A todos los puntos del plano complejo ordinario (plano de Gauss) les sumamos un único punto ideal, llamado el *punto en el infinito*, dándonos el *plano (de Gauss) complejo extendido*.

3.08. Teorema. A través del plano complejo extendido la transformación $z = 1/\xi$ es 1-1.

3.09. Teorema. Una función racional de grado k tiene k ceros y k polos en el plano complejo extendido.

Demostración: $W(z) = W(1/\xi)$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\xi}\right)^n \{a_n \xi^n + a_{n-1} \xi^{n-1} + \dots + a_0\}}{\left(\frac{1}{\xi}\right)^m \{b_m \xi^m + b_{m-1} \xi^{m-1} + \dots + b_0\}}.$$

Ahora, hay tres casos:

(1) $m = n = k$. Entonces hay k ceros y k polos.

(2) $m < n = k$. Entonces hay k ceros, m polos finitos y, como

$$\lim_{z \rightarrow \infty} W(z) = \infty,$$

$k - m$ polos infinitos.

(3) $n < m = k$. Entonces hay k polos, n ceros finitos y, como

$$\lim_{z \rightarrow \infty} W(z) = 0,$$

$k - n$ ceros infinitos.

3.10. Los artículos 3.05 y 3.09 proporcionan el siguiente cuadro.

Casos	No extendido		Infinito		Extendido	
	Ceros	Polos	Ceros	Polos	Ceros	Polos
(1) $m = n$	n	m			n	n
(2) $m > n$	n	m	$m - n$		m	m
(3) $m < n$	n	m		$n - m$	n	n

3.11. Teorema. Una función racional de grado k asume todos los valores complejos exactamente k veces en el plano extendido.

Demostración: Sea c un número complejo arbitrario y sea $W(z) = f(z)/g(z)$ cualquier función racional de grado k . Consideremos la función

$$V(z) = W(z) - c = \frac{f(z) - cg(z)}{g(z)}.$$

Ahora, $V(z)$ es racional y de grado k , y $W(z)$ asume el valor c exactamente tantas veces como $V(z)$ asume el valor 0. Pero $V(z)$ tiene sólo k ceros, por el Art. 3.09. En consecuencia, el teorema.

3.12. Teorema. Un polinomio de grado n tiene polo de orden n en ∞ .

Este es el Art. 3.09 para el caso especial donde $m = 0$.

CAPITULO 4

Proyección Estereográfica

4.01. Definición. Sea el plano xy el plano de Gauss. Construyamos una esfera de diámetro unitario por encima del plano xy pero tangente a él en el origen S . Sea N el punto $(0, 0, 1)$. Conectemos cualquier punto $P: (x, y)$ del plano de Gauss con N y observemos que esta línea corta a la esfera una vez más en el Punto $Q: (\xi, \eta, \zeta)$. Diremos, entonces, que P corresponde a Q , y viceversa. Esta correspondencia 1-1 tiene lugar en todos los puntos de la esfera excepto N , y en todos los puntos finitos del plano de Gauss. Para hacer la correspondencia 1-1 en el plano de Gauss extendido, asociamos N en la esfera y el punto en el infinito en el plano. (Véase la Fig. 4.1.)

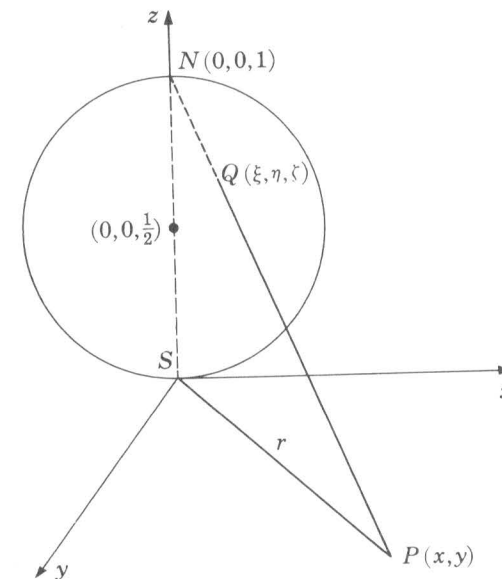


FIGURA 4.1

La esfera, bajo esta correspondencia, es conocida como la *esfera de Neumann*, y la transformación es llamada una *proyección estereográfica* (o proyección planimétrica).

4.02. Expresión analítica de la proyección estereográfica. La ecuación de la esfera es

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0. \quad (1)$$

Las ecuaciones simétricas para la línea PQ (ya que pasa por N) son

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{z-1}{\zeta-1}.$$

Esta línea encuentra al plano xy (donde $z = 0$) en el punto

$$P: \quad x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}. \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), tenemos

$$x^2(1-\zeta)^2 + y^2(1-\zeta)^2 + \zeta^2 - \zeta = 0.$$

En consecuencia, si $\zeta \neq 1$,

$$(x^2 + y^2)(1-\zeta) - \zeta = 0.$$

Por lo tanto, haciendo $x^2 + y^2 = r^2$, tenemos

$$\zeta = \frac{r^2}{1+r^2} \quad \text{y} \quad 1-\zeta = \frac{1}{1+r^2}. \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2), encontramos

$$Q: \quad \xi = \frac{x}{1+r^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+r^2}, \quad \zeta = \frac{r^2}{1+r^2}. \quad (4)$$

Las relaciones (2) y (4) dan las transformaciones de Q a P y de P a Q, respectivamente.

4.03. Teorema. Un gran círculo por N en la esfera de Neumann corresponde a una línea recta por el origen en el plano de Gauss, y a la inversa.

Demostración: La demostración es obvia geoméricamente, pero analíticamente es como sigue:

(1) Un gran círculo por N está determinado por la esfera y un plano

$$A\xi + B\eta = 0.$$

En consecuencia, por la transformación (4) del Art. 4.02, obtenemos la línea recta por el origen en el plano de Gauss,

$$Ax + By = 0.$$

(2) Inversamente, cualquier línea por el origen del plano de Gauss es

$$Ax + By = 0.$$

En consecuencia, por (2) del Art. 4.02, el lugar geométrico correspondiente en la esfera de Neumann es la intersección de la esfera por

$$A\xi + B\eta = 0,$$

o lo que es lo mismo, un gran círculo por N.

4.04. Teorema. Un pequeño círculo por N en la esfera de Neumann corresponde a una línea recta no por el origen en el plano de Gauss, y a la inversa.

Demostración: (1) Un pequeño círculo por N está determinado por la esfera y un plano

$$A\xi + B\eta + C(\zeta - 1) = 0, \quad C \neq 0.$$

La transformada es entonces

$$\frac{Ax}{1+r^2} + \frac{By}{1+r^2} - C \frac{1}{1+r^2} = 0,$$

o

$$Ax + By - C = 0, \quad C \neq 0,$$

una línea no por el origen en el plano de Gauss.

(2) A la inversa, cualquier línea no por el origen en el plano de Gauss es

$$Ax + By + C = 0, \quad C \neq 0.$$

La transformada es entonces el lugar geométrico común de la esfera y

$$\frac{A\xi}{1-\zeta} + \frac{B\eta}{1-\zeta} + C = 0,$$

o

$$A\xi + B\eta + C(1-\zeta) = 0, \quad C \neq 0,$$

un plano por N pero no por S . En consecuencia el lugar geométrico es un círculo pequeño por N .

4.05. Teorema. Cualquier círculo en la esfera de Neumann que no pasa por N corresponde a un círculo en el plano de Gauss, y a la inversa.

Demostración: (1) Un círculo en la esfera no por N está determinado por la esfera y un plano no por N ,

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0, \quad D \neq -C.$$

En consecuencia la transformada es

$$\frac{Ax}{1+r^2} + \frac{By}{1+r^2} + \frac{Cr^2}{1+r^2} + D = 0,$$

o

$$Ax + By + (C + D)(x^2 + y^2) + D = 0, \quad C + D \neq 0,$$

un círculo en el plano de Gauss.

(2) Inversamente, cualquier círculo en el plano de Gauss es

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad A \neq 0.$$

La transformada es entonces el lugar geométrico común de la esfera y

$$\frac{A(\xi^2 + \eta^2)}{(1-\zeta)^2} + \frac{B\xi}{1-\zeta} + \frac{C\eta}{1-\zeta} + D = 0,$$

o, como $\xi^2 + \eta^2 = \zeta(1-\zeta)$ [ver (1) del Art. 4.02],

$$A\zeta + B\xi + C\eta + D(1-\zeta) = 0,$$

o

$$B\xi + C\eta + (A-D)\zeta + D = 0, \quad A \neq 0,$$

un plano no por N . En consecuencia el lugar geométrico es un círculo en la esfera no por N .

4.06. Teorema. La proyección estereográfica es una transformación conformante.

Demostración: De (2) del Art. 4.02 encontramos

$$dx = \frac{d\xi}{1-\zeta} + \frac{\xi d\zeta}{(1-\zeta)^2} \quad \text{y} \quad dy = \frac{d\eta}{1-\zeta} + \frac{\eta d\zeta}{(1-\zeta)^2}.$$

Por lo tanto

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{(1-\zeta)^2} + \frac{2(\xi d\zeta + \eta d\eta)d\zeta}{(1-\zeta)^3} + \frac{(\xi^2 + \eta^2)d\zeta^2}{(1-\zeta)^4}. \quad (1)$$

Pero, de (1) del Art. 4.02,

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta(1-\zeta), \quad (2)$$

de lo cual

$$2(\xi d\zeta + \eta d\eta) = d\zeta - 2\zeta d\zeta. \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), encontramos

$$ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{(1-\zeta)^2}.$$

Por lo tanto

$$ds = \frac{1}{1-\zeta} dS,$$

donde ds y dS son los elementos diferenciales de arco en el plano y la esfera, respectivamente.

Esto es suficiente para probar que la proyección planimétrica es conformante, y la relación de amplificación al pasar de la esfera al plano es $1/(1-\zeta)$.

4.07. Observación. No es difícil establecer todos los teoremas anteriores por medio de la geometría sintética elemental.

un plano por N pero no por S . En consecuencia el lugar geométrico es un círculo pequeño por N .

4.05. Teorema. Cualquier círculo en la esfera de Neumann que no pasa por N corresponde a un círculo en el plano de Gauss, y a la inversa.

Demostración: (1) Un círculo en la esfera no por N está determinado por la esfera y un plano no por N ,

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0, \quad D \neq -C.$$

En consecuencia la transformada es

$$\frac{Ax}{1+r^2} + \frac{By}{1+r^2} + \frac{Cr^2}{1+r^2} + D = 0,$$

o

$$Ax + By + (C + D)(x^2 + y^2) + D = 0, \quad C + D \neq 0,$$

un círculo en el plano de Gauss.

(2) Inversamente, cualquier círculo en el plano de Gauss es

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad A \neq 0.$$

La transformada es entonces el lugar geométrico común de la esfera y

$$\frac{A(\xi^2 + \eta^2)}{(1-\zeta)^2} + \frac{B\xi}{1-\zeta} + \frac{C\eta}{1-\zeta} + D = 0,$$

o, como $\xi^2 + \eta^2 = \zeta(1-\zeta)$ [ver (1) del Art. 4.02],

$$A\zeta + B\xi + C\eta + D(1-\zeta) = 0,$$

o

$$B\xi + C\eta + (A-D)\zeta + D = 0, \quad A \neq 0,$$

un plano no por N . En consecuencia el lugar geométrico es un círculo en la esfera no por N .

4.06. Teorema. La proyección estereográfica es una transformación conformante.

Demostración: De (2) del Art. 4.02 encontramos

$$dx = \frac{d\xi}{1-\zeta} + \frac{\xi d\zeta}{(1-\zeta)^2} \quad \text{y} \quad dy = \frac{d\eta}{1-\zeta} + \frac{\eta d\zeta}{(1-\zeta)^2}.$$

Por lo tanto

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{(1-\zeta)^2} + \frac{2(\xi d\zeta + \eta d\eta)d\zeta}{(1-\zeta)^3} + \frac{(\xi^2 + \eta^2)d\zeta^2}{(1-\zeta)^4}. \quad (1)$$

Pero, de (1) del Art. 4.02,

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta(1-\zeta), \quad (2)$$

de lo cual

$$2(\xi d\zeta + \eta d\eta) = d\zeta - 2\zeta d\zeta. \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), encontramos

$$ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{(1-\zeta)^2}.$$

Por lo tanto

$$ds = \frac{1}{1-\zeta} dS,$$

donde ds y dS son los elementos diferenciales de arco en el plano y la esfera, respectivamente.

Esto es suficiente para probar que la proyección planimétrica es conformante, y la relación de amplificación al pasar de la esfera al plano es $1/(1-\zeta)$.

4.07. Observación. No es difícil establecer todos los teoremas anteriores por medio de la geometría sintética elemental.

CAPITULO 5

Transformaciones Bilineales

5.01. Definición. Una ecuación en z y z' será usada para establecer una correspondencia entre dichas variables. Es con frecuencia conveniente representar los puntos z y z' en planos diferentes; en cada uno de estos planos el origen y el punto 1 se seleccionan arbitrariamente, excepto que la unidad de longitud generalmente se supone igual para ambos planos. La ecuación entre z y z' establece entonces una correspondencia entre los puntos de los dos planos, y cualquier plano se dice que está *proyectado planimétricamente* en el otro. Una trayectoria z' que surge de este modo de una trayectoria z , se dice que es *la proyección planimétrica en el plano z' de la trayectoria z* . En particular, si se hace que coincidan los dos planos con el mismo origen y el mismo punto 1, se dice que el plano z está *proyectado planimétricamente en sí mismo*.

TRANSFORMACION RACIONAL INTEGRAL LINEAL

5.02. Teorema. La transformación $z' = z + b$ representa una traslación de la distancia $|b|$ en la dirección del arco b .

Demostración: La demostración es obvia geoméricamente.

5.03. Teorema. La transformación $z' = az$, $a \neq 0$, representa (a) una rotación con respecto a 0 del arco a , y (b) un alargamiento desde 0 de $|a|$.

Demostración: Sea $a = A \operatorname{cis} \alpha$, $z = r \operatorname{cis} \theta$. Entonces

$$z' = (A \operatorname{cis} \alpha)(r \operatorname{cis} \theta)$$

$$= Ar \operatorname{cis} (\alpha + \theta),$$

y tenemos

$$r' = Ar \quad \text{y} \quad \theta' = \theta + \alpha.$$

5.04. Teorema. La transformación $z' = az + b$, ($a \neq 0$), representa (a) una rotación con respecto a 0 del arco a , (b) un alargamiento desde 0 de $|a|$, y (c) una traslación de $|b|$ en la dirección del arco b .

Demostración: La demostración se sigue de los Arts. 5.02 y 5.03.

5.05. Definición. La transformación $z' = az + b$, ($a \neq 0$), es conocida como una *transformación racional integral lineal* (u *homología*).

5.06. Teorema. Cualquier transformación racional integral lineal es una transformación de analogía directa.

Demostración: La demostración se sigue inmediatamente del Art. 5.04.

5.07. Lema. Una transformación racional integral lineal es determinada en forma única por dos parejas distintas de puntos correspondientes.

Demostración: Dos parejas distintas de puntos correspondientes determinan en forma única los coeficientes a y b en $z' = az + b$.

O podemos de hecho construir la transformación como sigue. Sean z_1, z'_1 y z_2, z'_2 las dos parejas de puntos. Entonces tenemos

$$\left. \begin{aligned} z' &= az + b \\ z'_1 &= az_1 + b \\ z'_2 &= az_2 + b \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Eliminando a y b de las Ecs. (1), tenemos como la transformación requerida,

$$\begin{vmatrix} z' & z & 1 \\ z'_1 & z_1 & 1 \\ z'_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

o, como $z'_1 \neq z'_2, z_1 \neq z_2$,

$$\frac{z' - z'_1}{z'_2 - z'_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (3)$$

5.08. Lema. Una transformación de analogía directa es determinada en forma única por dos parejas distintas de puntos correspondientes.

Demostración: Sean z_1, z'_1 y z_2, z'_2 las dos parejas de puntos correspondientes. Tomemos cualquier otro punto z del plano z . Entonces, por geometría, sabemos que sólo hay un punto z' en

el plano z' tal que $\Delta z' z'_1 z'_2$ sea directamente análogo a $\Delta z z_1 z_2$. En consecuencia z' está determinada si z se da, y a la inversa, z está determinada si se da z' . En consecuencia la transformación está determinada.

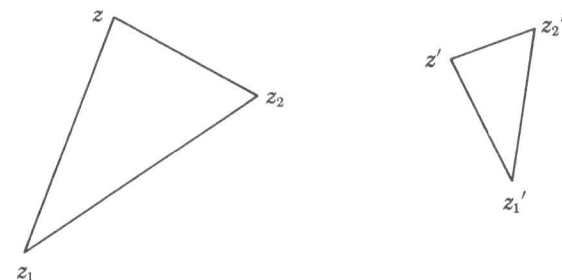


FIGURA 5.1

5.09. Teorema. Toda transformación de semejanza directa es una transformación racional integral lineal (la inversa del Art. 5.06).

Demostración: Tomemos dos parejas cualesquiera de puntos de una transformación de semejanza directa. Encontremos la transformación racional integral lineal determinada por estas parejas de puntos. La transformación está determinada en forma única (por el Art. 5.07). Esta transformación es una de semejanza directa (por el Art. 5.06). Es entonces la transformación de semejanza directa dada (por el Art. 5.08). De ahí el Teorema.

5.10. Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que $\Delta z_1 z_2 z_3$ sea semejante a $\Delta z'_1 z'_2 z'_3$ es que

$$\begin{vmatrix} z'_1 & z_1 & 1 \\ z'_2 & z_2 & 1 \\ z'_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Demostración: El teorema se sigue de (2) del Art. 5.07 y de los Arts. 5.06 y 5.09.

5.11. Definición. Un punto que es invariante bajo una transformación es llamado *punto fijo* o *doble* de la transformación.

5.12. Teorema. La transformación racional integral lineal

$$z' = az + b, \quad a \neq 1, \quad (1)$$

tiene el punto doble único $z_0 = b/(1 - a)$.

Demostración: En (1) sea $z' = z = z_0$ y despéjese z_0 .

5.13. Teorema. La transformación racional integral lineal

$$z' = az + b, \quad a \neq 1,$$

representa (a) un giro con respecto a z_0 por el arco a , y (b) un alargamiento desde z_0 de $|a|$.

Demostración:

$$\begin{aligned} z' &= az + b \\ &= az + \frac{b}{1-a}(1-a) \\ &= az + z_0(1-a) \\ &= a(z - z_0) + z_0, \end{aligned}$$

o

$$z' - z_0 = a(z - z_0).$$

TRANSFORMACION DE INVERSION

5.14. Teorema. La transformación

$$z' = z \quad (1)$$

representa una reflexión en el eje real.

Demostración: Sean $z' = r' \operatorname{cis} \theta'$ y $z = r \operatorname{cis} \theta$. Entonces $z = r \operatorname{cis} (-\theta)$. En consecuencia, de (1),

$$r' = r \text{ y } \theta' = -\theta,$$

y tenemos una reflexión en el eje real.

O sea $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$. Entonces $\bar{z} = x - iy$. En consecuencia de (1),

$$x' = x \text{ y } y' = -y.$$

5.15. Teorema. La transformación $z' = 1/z$ representa una inversión en el centro de círculo unitario 0.

Demostración: Tenemos

$$\begin{aligned} r' \operatorname{cis} \theta' &= \frac{1}{r \operatorname{cis} (-\theta)} \\ &= \frac{1}{r \operatorname{cis} (-\theta)} \operatorname{cis} \theta \\ &= \frac{1}{r} \operatorname{cis} \theta. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$rr' = 1 \text{ y } \theta' = \theta.$$

O, alternativamente,

$$z' = 1/z = z/z\bar{z} = z/r^2.$$

Por lo tanto

$$x' + iy' = \frac{x + iy}{x^2 + y^2},$$

y tenemos

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

una transformación de inversión con respecto al círculo unitario en 0.

5.16. Teorema. La transformación de inversión general en el círculo de centro a y radio r es

$$z' - a = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}},$$

o

$$z' = \frac{az + r^2 - |a|^2}{\bar{z} - \bar{a}}.$$

Demostración: Esta transformación es ciertamente el producto de

- (1) $z_1 = z - a$, una traslación llevando el círculo al origen;
- (2) $z_2 = r^2/\bar{z}_1$, una inversión en el círculo en el origen;
- (3) $z' = z_2 + a$, una traslación llevando el círculo de regreso a a .

5.17. Teorema. Una transformación de reflexión en una línea l perpendicular a la dirección α y a una distancia A del origen es

$$z' = -z \operatorname{cis} 2\alpha + 2A \operatorname{cis} \alpha.$$

Demostración: Sea $z = r \operatorname{cis} \theta$ cualquier punto y sea z' su reflexión en l . Entonces, evidentemente, z puede mandarse a z' por una traslación de distancia

$$2\{A - r \cos(\theta - \alpha)\} \text{ en la dirección de } \alpha.$$

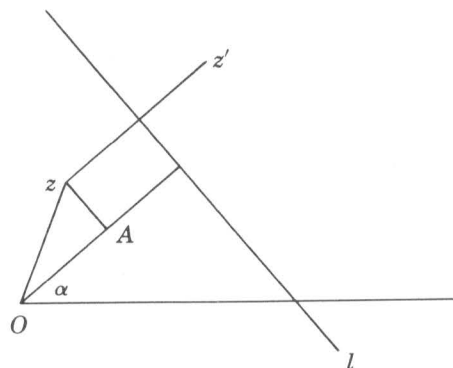


FIGURA 5.2

Esto es,

$$\begin{aligned}
 z' &= z + 2\{A - r \cos(\theta - \alpha)\} \operatorname{cis} \alpha \\
 &= r\{\operatorname{cis} \theta - 2 \cos(\theta - \alpha) \operatorname{cis} \alpha\} + 2A \operatorname{cis} \alpha \\
 &= r\{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) - 2(\cos \theta \cos \alpha + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha) \\
 &\quad (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)\} + 2A \operatorname{cis} \alpha \\
 &= r\{\cos \theta(1 - 2 \cos^2 \alpha - 2i \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha) + i \operatorname{sen} \theta \\
 &\quad (1 + 2i \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha)\} + 2A \operatorname{cis} \alpha \\
 &= r\{-\cos \theta(\cos 2\alpha + i \operatorname{sen} 2\alpha) + i \operatorname{sen} \theta(\cos 2\alpha + i \operatorname{sen} 2\alpha)\} \\
 &\quad + 2A \operatorname{cis} \alpha \\
 &= -r(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)(\cos 2\alpha + i \operatorname{sen} 2\alpha) + 2A \operatorname{cis} \alpha \\
 &= -z \operatorname{cis} 2\alpha + 2A \operatorname{cis} \alpha.
 \end{aligned}$$

5.18. Teorema. Una traslación puede ser descompuesta en dos reflexiones en líneas rectas.

Demostración: Consideremos la traslación

$$z' = z + a, \quad a = A \operatorname{cis} \alpha. \quad (1)$$

Pero (1) puede ser descompuesto en

$$z_1 = -z \operatorname{cis} 2\alpha + 2B \operatorname{cis} \alpha, \quad (2)$$

y

$$z' = -z_1 \operatorname{cis} 2\alpha + (A + 2B) \operatorname{cis} \alpha. \quad (3)$$

Así, eliminando z_1 entre (2) y (3), tenemos

$$\begin{aligned}
 z' &= \{z \operatorname{cis}(-2\alpha) - 2B \operatorname{cis}(-\alpha)\} \operatorname{cis} 2\alpha + (A + 2B) \operatorname{cis} \alpha \\
 &= z - 2B \operatorname{cis} \alpha + (A + 2B) \operatorname{cis} \alpha \\
 &= z + A \operatorname{cis} \alpha \\
 &= z + a.
 \end{aligned}$$

Pero, por el Art. 5.17, (2) y (3) son reflexiones en líneas rectas. En consecuencia el teorema.

5.19. Teorema. Un giro puede ser descompuesto en dos reflexiones en líneas rectas.

Demostración: No se pierde ninguna generalidad tomando el giro con respecto al origen, 0. Dicho giro es de la forma

$$z' = z \operatorname{cis} \theta, \quad (1)$$

donde θ es el ángulo de giro. Ahora, (1) puede descomponerse en

$$z_1 = -z \operatorname{cis} 2\alpha \quad (2)$$

y

$$z' = -z_1 \operatorname{cis}(\theta + 2\alpha). \quad (3)$$

Así, eliminando z_1 entre (2) y (3), tenemos

$$\begin{aligned}
 z' &= z \operatorname{cis}(-2\alpha) \operatorname{cis} \theta \operatorname{cis}(2\alpha) \\
 &= z \operatorname{cis} \theta.
 \end{aligned}$$

Pero, por el Art. 5.17, (2) es una reflexión en la línea perpendicular a *cualquier* dirección α y que pasa por el centro, y (3) es una reflexión en la línea perpendicular a la dirección $\theta/2 + \alpha$ y que pasa por el centro. De ahí el teorema.

5.20. Teorema. Un alargamiento positivo puede ser descompuesto en dos inversiones en círculos.

Demostración: No se pierde ninguna generalidad tomando el centro de alargamiento en el origen. Cualquier alargamiento positivo tal, es de la forma

$$z' = k^2 z, \quad (1)$$

donde k es una constante real. Ahora, (1) puede ser descompuesto en

$$z_1 = r^2/z \quad (2)$$

y

$$z' = k^2 r^2/z_1. \quad (3)$$

Así, eliminando z_1 entre (2) y (3), tenemos

$$z' = \frac{k^2 r^2}{r^2/z} = k^2 z.$$

Pero (2) es una inversión en un círculo con centro 0 y *cualquier* radio r , y (3) es una inversión en un círculo con centro 0 y radio $|k|r$. De ahí el teorema.

5.21. Teorema. Las inversiones y reflexiones son transformaciones conformantes con inversión de ángulos.

Demostración: La demostración es evidente geométricamente.

5.22. Teorema. La transformación

$$z' = 1/\bar{z} \quad (1)$$

representa (a) reflexión en el eje real, y (b) inversión en el centro 0 del círculo unitario.

Demostración: (1) puede ser descompuesta en $z_1 = \bar{z}$ y $z' = 1/\bar{z}_1$.

Nota: Las operaciones (a) y (b) son conmutativas.

5.23. Definición. La transformación del Art. 5.22 es llamada la *transformación recíproca*.

5.24. Teorema. La transformación recíproca es conformante sin inversión de ángulos.

Demostración: Por los Arts. 5.21 y 5.22.

5.25. Teorema. La transformación (una *antilogía*)

$$z' = az + b, \quad a \neq 0, \quad (1)$$

es la transformación de semejanza inversa más general.

Demostración: (a) Todas las transformaciones de la forma (1) son transformaciones de semejanza inversas.

Ya que (1) es igual al producto de

$$z_1 = \bar{a}z + \bar{b} \quad \text{y} \quad z' = z_1.$$

Esto es, (1) es una transformación de semejanza directa seguida por una reflexión en el eje real, lo cual obviamente da una transformación de semejanza inversa.

(b) Una transformación de tipo (1) está determinada como única por dos parejas distintas de puntos correspondientes.

Ya que dos parejas distintas de puntos determinan como únicos los coeficientes a y b .

(c) Una transformación de semejanza inversa está determinada como única por dos parejas distintas de puntos correspondientes.

Esto es evidente geoméricamente.

(d) Todas las transformaciones de semejanza inversa son de la forma (1).

Ya que tomamos dos parejas cualesquiera de puntos de una transformación de semejanza inversa dada. Por (b), existe una transformación única del tipo (1) tal, que estas parejas de puntos son correspondientes. Pero, por (a), esta transformación es una de semejanza inversa. Es, entonces, en virtud de (c), la transformación de semejanza inversa dada.

(e) De ahí el teorema por (a) y (d).

TRANSFORMACION BILINEAL

5.26. Definición. La transformación

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad (1)$$

es conocida como una *transformación bilineal*.

Despejando en (1) a z en función de z' , encontramos

$$z = \frac{-dz' + b}{cz' - a}. \quad (2)$$

Así z y z' pueden cada una ser expresadas como una función racional lineal de la otra.

5.27. Teorema. La transformación bilineal es 1-1 a través del plano complejo extendido.

Demostración: La transformación es claramente 1-1 en el plano complejo no extendido. Pero vemos que a $z = \infty$ corresponde $z' = a/c$, y a $z' = \infty$ corresponde $z = -d/c$. (Si $c = 0$, entonces $z = \infty$ y $z' = \infty$ son puntos correspondientes, y la transformación bilineal se convierte en una transformación racional integral lineal.)

5.28. Teorema. La transformación

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad c \neq 0$$

representa (a) rotación con respecto a 0 a través del arco c , (b) alargamiento desde 0 de $|c|$, (c) traslación a través de $|d|$ en la dirección del arco d , (d) inversión en el círculo unitario en 0, (e) reflexión en el eje real, (f) rotación con respecto a 0 del arco $\frac{bc-ad}{c}$, (g) alargamiento desde 0 de $\left|\frac{bc-ad}{c}\right|$, y (h) traslación a través de $|a/c|$ en la dirección del arco a/c .

Demostración: Podemos descomponer la transformación dada en

$$z' = \frac{a}{c} + z_1, \quad z_1 = \frac{bc-ad}{c} z_2, \quad z_2 = z_3, \quad z_3 = 1/z_4, \quad z_4 = cz + d,$$

ya que, después de eliminar, tenemos

$$\begin{aligned} z' &= \frac{a}{c} + z_1 \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} z_2 \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} z_3 \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{cz_4} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)} \\ &= \frac{az+b}{cz+d}. \end{aligned}$$

5.29. Definición. Una transformación de punto 1-1 del plano complejo extendido que lleva círculos a círculos (líneas rectas consideradas como círculos) se conoce como una *transformación circular*.

5.30. Teorema. La transformación bilineal es una transformación circular conformante directa.

Demostración: La demostración se sigue inmediatamente del Art. 5.28, donde se demostró que una transformación bilineal es un producto de algunas transformaciones circulares

conformantes directas —traslaciones, rotación, alargamiento— y un par de transformaciones circulares conformantes inversas —inversión, reflexión.

5.31. Teorema. Toda transformación circular es una transformación bilineal o una transformación bilineal seguida por una reflexión en el eje real.

Demostración: Sea T una transformación circular y sean P y P' un par de puntos correspondientes. Entonces los círculos que pasan por P irán dentro de círculos por P' .

Ahora sea S una transformación de inversión con P como centro y S' una transformación de inversión con P' como centro. Consideremos la transformación $T' = STS'$. Entonces T' es una transformación circular. Es fácil ver que bajo T' las líneas rectas van a líneas rectas. Más aún, líneas paralelas dan líneas paralelas, ya que bajo S las líneas paralelas originales dan círculos tangentes a través de P ; esto, a su vez, bajo T debe dar círculos tangentes a través de P' ; y esto, finalmente, bajo S' da líneas paralelas. Por lo tanto, los paralelogramos dan paralelogramos. En particular, entonces, rectángulos (que son paralelogramos concíclicos) deben dar rectángulos, y líneas perpendiculares darán líneas perpendiculares. En consecuencia, un cuadrado (que es un rectángulo con diagonales perpendiculares) debe dar un cuadrado. Finalmente, bajo T' , si A, B, C son puntos en una línea con B entre A y C entonces A', B', C' están en una línea con B' entre A' y C' . Lo último es aparente cuando recordamos que una condición necesaria y suficiente para que un punto se encuentre entre otros dos es que toda línea que pase por ese punto debe intersectar a todo círculo que pase por los otros dos dos veces, y es invariante bajo T' .

Ahora supongamos que T' lleva un cuadrado $ABCD$ al cuadrado $A'B'C'D'$. Si $A'B'C'D'$ es directamente semejante a $ABCD$, sea T'' la transformación de semejanza directa que lleva $A'B'C'D'$ a $ABCD$. Si $A'B'C'D'$ es inversamente semejante a $ABCD$, sea R la reflexión en el eje real, que lleva $A'B'C'D'$ a $A''B''C''D''$, y sea T'' la transformación de semejanza directa que lleva $A''B''C''D''$ a $ABCD$.

Hagamos $U = T'T''$ o $U = T'RT''$, según sea el caso. Bajo U el cuadrado $ABCD$ es llevado a sí mismo.

Pero si el cuadrado es dejado invariante, cualquier cuadrado contiguo, por ejemplo, compartiendo uno de sus lados, es inva-

riante. Más aún si un cuadrado es invariante, los cuatro cuadrados contiguos iguales en los que se puede dividir serán invariantes. En consecuencia, el plano está cubierto con una red densa de cuadrados invariantes de lados tan pequeños como queramos, y, como los espacios son invariantes, todos los puntos son invariantes. En consecuencia U es la transformación idéntica.

Como S , S' , T'' y R poseen inversas, y como $S^{-1} = S$ y $S'^{-1} = S'$, tenemos

$$T = S^{-1}T''^{-1}S'^{-1} \quad \text{o} \quad T = S^{-1}T''^{-1}R^{-1}S'^{-1}, \quad (1)$$

según sea el caso. Sustituyendo expresiones analíticas para los factores en el miembro de la derecha de (1), encontraríamos

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{o} \quad z' = \frac{az + b}{cz + \bar{d}}.$$

En consecuencia el teorema.

5.32. Teorema. Toda transformación circular es conformante.

5.33. Lema. Si P_1 y P_2 son inversas en un círculo C o una línea C , entonces cualquier círculo por P_1 y P_2 es ortogonal a C .

Demostración: Esto se prueba con facilidad geométrica.

5.34. Lema. Si T y S son círculos ortogonales a un círculo C o una línea C , entonces sus puntos de intersección son inversos en C .

Demostración: Esto es con facilidad demostrable geométricamente.

5.35. Teorema. Los puntos P_1 y P_2 inversos en un círculo C o una línea C se transforman, por una transformación bilineal, en puntos P'_1 y P'_2 inversos en C' .

Demostración: Pasemos dos círculos cualesquiera T y S por los puntos P_1 y P_2 . Entonces, por el Art. 5.33, T y S son ortogonales a C . Ahora una transformación bilineal es tanto circular como conformante. Por lo tanto, T y S se transforman en círculos (o líneas rectas) T' y S' ortogonales a C' . En consecuencia, por el Art. 5.34, sus intersecciones P'_1 y P'_2 son inversas en C' .

5.36. Teorema. El conjunto de las transformaciones bilineales forma un grupo.

5.37. Teorema. Una transformación puede ser descompuesta en un número par de inversiones en círculos o líneas rectas si y sólo si es una transformación bilineal.

Demostración: (1) Por el Art. 5.18, una traslación puede ser descompuesta en dos reflexiones en líneas rectas convenientemente elegidas; por el Art. 5.19, una rotación puede ser descompuesta en dos reflexiones en líneas rectas convenientemente elegidas; y, por el Art. 5.20, un alargamiento positivo puede ser descompuesto en dos inversiones en círculos convenientemente elegidos. En consecuencia, por el Art. 5.28, una transformación bilineal puede ser descompuesta en un número par de inversiones en círculos o líneas rectas.

(2) Es fácilmente demostrable que el producto de dos reflexiones, dos inversiones, una reflexión y una inversión, o una inversión y una reflexión es una transformación bilineal. En consecuencia, por el Art. 5.36, cualquier transformación compuesta de un número par de inversiones en círculos o líneas rectas es una transformación bilineal.

Nota: Se puede demostrar que el número de inversiones en círculos o líneas es dos o cuatro.

5.38. Lema. Si z_1 y z_2 son puntos dados y z es un punto variable tal que

$$\text{arco} \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right) = \alpha, \text{ una constante,}$$

entonces z cae sobre un arco de círculo por z_1 y z_2 , y a la inversa.

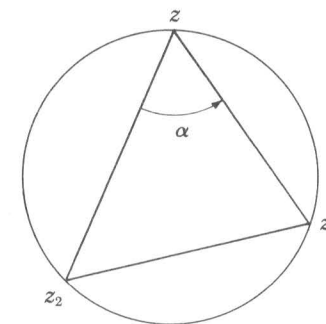


FIGURA 5.3

Demostración: Tenemos $\angle z_2 z z_1 = \alpha$, de donde z puede tomar todas las posiciones en cierto arco circular cuyos extremos son z_1 y z_2 .

5.39. Lema. Si z_1 y z_2 son puntos dados y z es un punto variable tal que

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = k, \text{ una constante,}$$

entonces z cae en un círculo completo teniendo a z_1 y z_2 como puntos inversos, y a la inversa.

Demostración: Tenemos

$$\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = k,$$

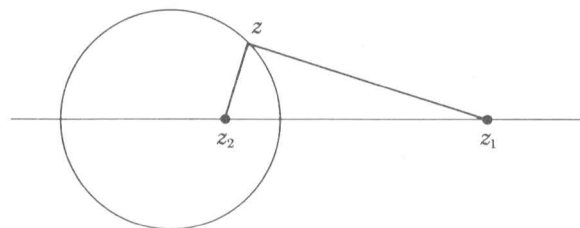


FIGURA 5.4

de donde z cae en un lugar geométrico de las distancias de los puntos cuyas distancias a los dos puntos dados z_1 y z_2 tienen una razón constante k . Este lugar geométrico es un círculo que tiene a z_1 y z_2 como puntos inversos.

5.40. Teorema. Sean z_1, z'_1 y z_2, z'_2 dos parejas de puntos correspondientes finitos de la transformación bilineal

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces

$$\frac{z' - z'_1}{z' - z'_2} = \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}. \quad (1)$$

Demostración: Tenemos

$$z' - z'_1 = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{az_1 + b}{cz_1 + d}$$

($cz_1 + d \neq 0$, porque de otra manera $z'_1 = \infty$, una contradicción de la hipótesis)

$$= \frac{(ad - bc)(z - z_1)}{(cz + d)(cz_1 + d)}. \quad (2)$$

De una manera semejante,

$$z' - z'_2 = \frac{(ad - bc)(z - z_2)}{(cz + d)(cz_2 + d)}. \quad (3)$$

Dividiendo (2) entre (3), obtenemos el resultado deseado.

5.41. Teorema. (Alternativa para los Arts. 5.30 y 5.35). Una transformación bilineal es circular y preserva las relaciones de inversión.

Demostración: Consideremos cualquier círculo C y sean z_1 y z_2 dos puntos cualesquiera en éste. Si z es cualquier otro punto sobre C , entonces, por el Art. 5.38,

$$\text{arco} \frac{z - z_1}{z - z_2} = \text{constante.}$$

En consecuencia, por (1) del Art. 5.40,

$$\text{arco} \frac{z' - z'_1}{z' - z'_2} = \text{constante.}$$

En consecuencia, por el Art. 5.38, z' cae sobre un círculo C' .

Ahora consideremos cualquier círculo C y sean z_1 y z_2 dos puntos cualesquiera inversos con respecto a C . Si z es un punto cualquiera sobre C , entonces, por el Art. 5.39,

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \text{constante.}$$

En consecuencia, por (1) del Art. 5.40,

$$\left| \frac{z' - z'_1}{z' - z'_2} \right| = \text{constante.}$$

Por lo tanto, por el Art. 5.39, z' cae sobre un círculo C' para el cual z'_1 y z'_2 son puntos inversos.

5.42. Teorema. Una transformación bilineal está determinada en forma única por tres parejas distintas de puntos correspondientes.

Demostración: Séanos dadas tres parejas de puntos correspondientes

$$z_i \text{ y } z'_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

donde

$$z_i \neq z_j, z'_i \neq z'_j \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j). \quad (1)$$

Ahora, cualquier transformación bilineal es

$$czz' + dz' - az - b = 0,$$

de lo cual requerimos que

$$cz_i z'_i + dz'_i - az_i - b = 0.$$

La condición para que estas ecuaciones tengan una solución y sólo una diferente de $a = b = c = d = 0$ es que la matriz

$$\begin{pmatrix} z'_1 z_1 & z'_1 & z_1 & 1 \\ z'_2 z_2 & z'_2 & z_2 & 1 \\ z'_3 z_3 & z'_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix}$$

sea de rango 3. Demostraremos que éste es el caso suponiendo lo contrario. Entonces tenemos

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} z'_1 & z_1 & 1 \\ z'_2 & z_2 & 1 \\ z'_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

y

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} z'_1 z_1 & z_1 & 1 \\ z'_2 z_2 & z_2 & 1 \\ z'_3 z_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde

$$0 = \Delta_2 - z_1 \Delta_1 = (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)(z'_2 - z'_3) \neq 0,$$

una contradicción. Así que nuestra matriz debe ser de rango 3 y tenemos una solución única para a, b, c, d . Más aún, debemos tener

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

porque de otro modo *todos* los puntos del plano z se concentrarían en *un* punto del plano z' . Pero sabemos que esto no es

así, siempre que se nos den *tres* parejas *distintas* de puntos correspondientes. De ahí el teorema.

5.43. Teorema. La transformación bilineal determinada por las tres parejas distintas de puntos correspondientes $z_1, z'_1, z_2, z'_2, z_3, z'_3$ es

$$\begin{vmatrix} z'z & z' & z & 1 \\ z'_1 z_1 & z'_1 & z_1 & 1 \\ z'_2 z_2 & z'_2 & z_2 & 1 \\ z'_3 z_3 & z'_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

5.44. Teorema. La transformación (1) del Art. 5.43 puede escribirse como

$$\frac{z' - z'_1}{z'_1 - z'_2} \cdot \frac{z'_2 - z'_3}{z'_3 - z'} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_3 - z}.$$

Demostración: Esta es obviamente una transformación bilineal y, más aún, se satisface con

$$z = z_1, \quad z' = z'_1; \quad z = z_2, \quad z' = z'_2; \quad z = z_3, \quad z' = z'_3.$$

En consecuencia, por el Art. 5.42, esta transformación debe ser igual a la del Art. 5.42.

PUNTOS FIJOS DE UNA TRANSFORMACION BILINEAL

5.45. Teorema. La transformación bilineal

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad c \neq 0 \quad (1)$$

tiene los dos puntos fijos

$$z_1 = \frac{a - d + \sqrt{S}}{2c} \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{a - d - \sqrt{S}}{2c}, \quad (2)$$

donde

$$S = (a - d)^2 + 4bc. \quad (3)$$

Demostración: Haciendo $z' = z = z_0$ en (1) y despejando z_0 , encontramos

$$z_0 = \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c}.$$

5.46. Teorema. La transformación bilineal (1) del Art. 5.45, expresada en función de sus puntos fijos z_1 y z_2 , es

$$\frac{z' - z_1}{z' - z_2} = K \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad (1)$$

donde

$$K = \frac{a + d - \sqrt{S}}{a + d + \sqrt{S}}. \quad (2)$$

Demostración: En el Art. 5.40 tómense $z'_1 = z_1$ y $z'_2 = z_2$, los puntos fijos. Entonces tenemos (ya que $cz_1 + d \neq 0$)

$$\frac{z' - z_1}{z' - z_2} = \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}. \quad (3)$$

El teorema ahora se sigue sustituyendo (2) del Art. 5.45 para z_1 y z_2 en $\frac{cz_2 + d}{cz_1 + d}$ en (3).

5.47. Teorema. El conjunto de los círculos coaxiales en los puntos fijos de una transformación bilineal es, como conjunto, invariante durante la transformación.

Demostración: Por el Art. 5.30.

5.48. Teorema. El conjunto de los círculos coaxiales teniendo los puntos fijos de una transformación bilineal como puntos límite es, como conjunto, invariante durante la transformación.

Demostración: Por los Arts. 5.30 y 5.35.

5.49. Teorema. Una transformación bilineal es determinada en forma única por los puntos fijos y alguna otra pareja de puntos correspondientes.

Demostración: Este es un corolario inmediato del Art. 5.42.

5.50 Definición. La constante K de (2) del Art. 5.46 es conocida como la *invariante* de la transformación bilineal.

5.51. Teorema. Una transformación bilineal está determinada en forma única por los puntos fijos y la invariante.

Demostración: Este es el Art. 5.46.

5.52. Definición. Si los puntos fijos de una transformación bilineal coinciden, entonces se dice que la transformación es *parabólica*; si no coinciden, la transformación es *no parabólica*.

5.53. Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que la transformación bilineal (1) del Art. 5.45 sea parabólica, es que $(a - d)^2 + 4bc = 0$. Los puntos fijos coinciden en

$$z_0 = \frac{a - d}{2c}$$

y la invariante $K = 1$. (Ver los Arts. 5.45 y 5.46.)

5.54. Teorema. La transformación bilineal parabólica en función de su punto fijo z_0 es

$$\frac{1}{z' - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + \frac{2c}{a + d}, \quad a \neq -d.$$

Demostración: En (3) del Art. 5.46 hagamos $z_1 = z_0 + \delta$, $z_2 = z_0$. Entonces tenemos

$$\frac{z' - z_0 - \delta}{z' - z_0} = \frac{z - z_0 - \delta}{z - z_0} \cdot \frac{cz_0 + d}{cz_0 + c\delta + d}.$$

Esto es equivalente a

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\delta}{z' - z_0} &= \left(1 - \frac{\delta}{z - z_0}\right) \left(1 - \frac{c\delta}{cz_0 + c\delta + d}\right) \\ &= 1 - \frac{c\delta}{cz_0 + c\delta + d} - \frac{\delta}{z - z_0} + \frac{c\delta^2}{(z - z_0)(cz_0 + c\delta + d)}. \end{aligned}$$

Ahora, cancelando los unos, dividiendo todo entre δ , y haciendo $\delta \rightarrow 0$, tenemos

$$\frac{1}{z' - z_0} = \frac{c}{cz_0 + d} + \frac{1}{z - z_0}.$$

Pero, del Art. 5.53,

$$\frac{c}{cz_0 + d} = \frac{2c}{a + d}.$$

De ahí el teorema.

Alternativa: Sea la transformación bilineal parabólica

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad c \neq 0, \quad (1)$$

donde

$$S \equiv (a - d)^2 + 4bc = 0. \quad (2)$$

También tenemos, por el Art. 5.53, que el punto fijo es

$$z_0 = \frac{a-d}{2c}. \quad (3)$$

Ahora, de (1) tenemos (ya que z_0 es el punto fijo y ya que $cz_0 + d \neq 0$)

$$z_0 = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d}. \quad (4)$$

Sustrayendo (4) de (1), obtenemos

$$\begin{aligned} z' - z_0 &= \frac{az + b}{cz + d} - \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \\ &= \frac{(az + b)(cz_0 + d) - (cz + d)(az_0 + b)}{(cz + d)(cz_0 + d)} \\ &= \frac{(ad - bc)(z - z_0)}{(cz + d)(cz_0 + d)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{z' - z_0} = \frac{(cz + d)(cz_0 + d)}{(ad - bc)(z - z_0)}. \quad (5)$$

Ahora, de (3), vemos que

$$cz_0 + d = (a + d)/2,$$

y, de (2), que

$$ad - bc = ad + \frac{(a-d)^2}{4} = \left(\frac{a+d}{2}\right)^2.$$

Por lo tanto

$$ad - bc = (cz_0 + d)^2. \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (5), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z' - z_0} &= \frac{cz + d}{(z - z_0)(cz_0 + d)} = \frac{1}{z - z_0} + \frac{c}{cz_0 + d} \\ &= \frac{1}{z - z_0} + \frac{2c}{a + d}. \end{aligned}$$

5.55. Sumario de puntos fijos de transformaciones bilineales.
Sea la transformación bilineal

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

(1) *No integral, no parabólica*

(a) $c \neq 0, \quad (a-d)^2 + 4bc \neq 0.$

(b) $z_1, z_2 = \frac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}.$

(c) Puntos fijos finitos y distintos.

(2) *No integral, parabólica*

(a) $c \neq 0, \quad (a-d)^2 + 4bc = 0.$

(b) $z_1, z_2 = \frac{a-d}{2c}.$

(c) Puntos fijos finitos y concurrentes.

(3) *Integral, no parabólica*

(a) $c = 0, \quad a \neq d.$

(b) $z_1 = -\frac{b}{a-d}, \quad z_2 = \infty.$

(c) Un punto fijo finito, el otro infinito.

(4) *Integral, parabólica*

(a) $c = 0, \quad a = d.$

(b) $z_1, z_2 = \infty.$

(c) Ambos puntos fijos infinitos.

CLASIFICACION DE TRANSFORMACIONES BILINEALES

5.56. Nota. Supongamos que z_1 y z_2 son los puntos fijos de la transformación bilineal y que S_1 denota la familia de los círculos coaxiales que tienen a z_1 y z_2 como puntos límite, y que S_2 denota la familia de círculos coaxiales que pasan por z_1 y z_2 . Ahora consideremos los siguientes posibles casos de transformación bilineal:

(1) No integral no parabólica.

(2) No integral parabólica.



(3) Integral no parabólica.

(4) Integral parabólica.

Para estos casos las familias de círculos S_1 y S_2 son como se indica en la Fig. 5.5.

Tratamos, en los Arts. 5.57 y 5.62, de subclasificar nuestros cuatro casos de acuerdo con el comportamiento, durante la transformación, de estas familias de círculos S_1 y S_2 .

5.57. Caso 1: No integral no parabólica. Para dicha transformación tenemos, por el Art. 5.46,

$$\frac{z' - z_1}{z' - z_2} = K \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

donde K es la invariante de la transformación. Ahora sean

$$\frac{z' - z_1}{z' - z_2} = r' \operatorname{cis} \theta', \quad \frac{z - z_1}{z - z_2} = r \operatorname{cis} \theta, \quad K = m \operatorname{cis} \mu.$$

A. $m = 1, \mu \neq 0, \pi$ (caso elíptico). Aquí tenemos

$$r' = r, \quad \theta' = \theta + \mu, \quad \mu \neq 0, \pi.$$

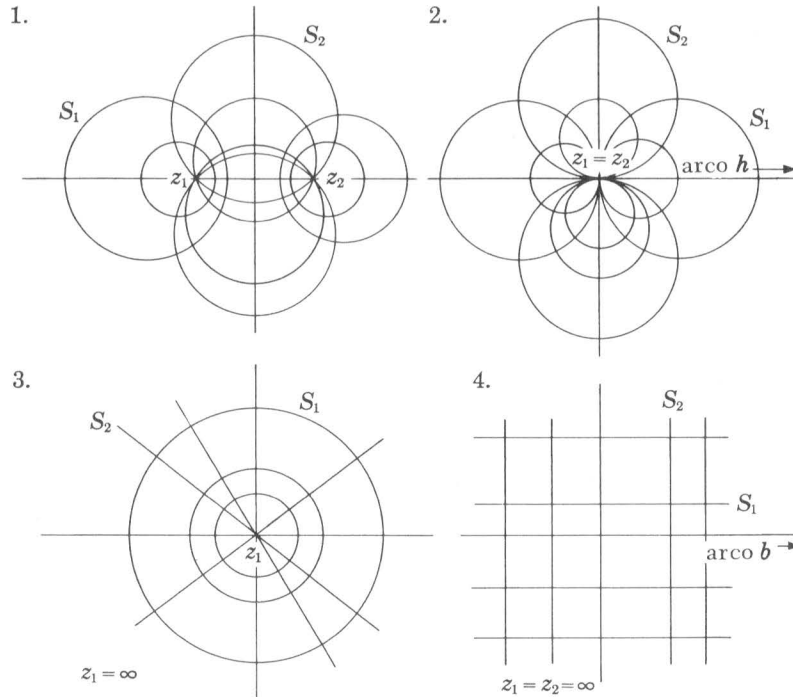


FIGURA 5.5

En consecuencia

(1) los círculos S_1 son invariantes (Art. 5.39),

(2) los círculos S_2 están permutados (Art. 5.38).

B. $m \neq 1, \mu = 0, \pi$ (caso hiperbólico). Aquí tenemos

$$r' = mr, m \neq 1, \quad \theta' = \theta \quad \text{o} \quad \theta' = \theta + \pi.$$

En consecuencia

(1) los círculos S_1 están permutados (Art. 5.39),

(2) los círculos S_2 son invariantes (Art. 5.38).

C. $m = 1, \mu = 0$ (Caso idéntico); ésta, no obstante, es también integral parabólica. Aquí tenemos

$$r' = r, \quad \theta' = \theta.$$

En consecuencia

(1) los círculos S_1 son invariantes (Art. 5.39),

(2) los círculos S_2 son invariantes, arco para arco (Art. 5.38).

Así todo punto de este plano se transforma en sí mismo.

D. $m = 1, \mu = \pi$ (caso de la involución de Möbius). Aquí tenemos

$$r' = r, \quad \theta' = \theta + \pi.$$

En consecuencia

(1) los círculos S_1 son invariantes (Art. 5.39),

(2) los círculos S_2 son invariantes, arco para arco conjugado (Art. 5.38).

Así la transformación es involutórica.

E. $m \neq 1, \mu \neq 0, \pi$ (caso loxodrómico). Aquí tenemos

$$r' = mr, m \neq 1, \quad \theta' = \theta + \mu, \mu \neq 0, \pi.$$

En consecuencia

(1) los círculos S_1 están permutados (Art. 5.39),

(2) los círculos S_2 están permutados (Art. 5.38).

5.58. Teorema. La única transformación bilineal no integral involutórica es la involución de Möbius.

Demostración: Sea la transformación

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad c \neq 0,$$

o

$$czz' + dz' - az - b = 0. \quad (1)$$

Intercambiando z y z' , obtenemos

$$czz' + dz - az' - b = 0. \quad (2)$$

Ahora, (1) y (2) será la misma transformación si y sólo si

$$a = -d. \quad (3)$$

Entonces, si la transformación es no parabólica,

$$K = \frac{a + d - \sqrt{S}}{a + d + \sqrt{S}} = \frac{-\sqrt{S}}{+\sqrt{S}} = -1, \quad S \neq 0.$$

En consecuencia $m = 1$, $\mu = \pi$, y la transformación es una involución de Möbius.

Notaremos que si $S = 0$, tenemos, por (3),

$$a^2 + bc = 0.$$

Pero, por hipótesis,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & -a \end{vmatrix} = -(a^2 + bc) \neq 0.$$

En consecuencia no hay involuciones parabólicas no integrales.

5.59. Teorema. El conjunto de las espirales loxodrómicas alrededor de z_1 y z_2 .

$$r = ke^{[(\log m)/\mu]\theta},$$

donde k es un parámetro, es invariable en el caso loxodrómico E del Art. 5.57.

Demostración: Debemos tener, de E del Art. 5.57,

$$\begin{aligned} \frac{r'}{m} &= ke^{[(\log m)/\mu](\theta' - \mu)} \\ &= ke^{[(\log m)/\mu]\theta'} e^{-\log m} \\ &= \frac{ke^{[(\log m)/\mu]\theta'}}{m}, \end{aligned}$$

de lo cual

$$r' = ke^{[(\log m)/\mu]\theta'},$$

la misma espiral loxodrómica alrededor de z_1 y z_2 .

5.60. Caso 2: No integral parabólica. Aquí la transformación es

$$\frac{1}{z' - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + h, \quad h = \frac{2c}{a + d}. \quad (1)$$

Descompongamos (1) en

$$(a) \quad z'' - z_1 = \frac{1}{z - z_1} \quad (\text{inversión}),$$

$$(b) \quad z''' = z'' + \bar{h} \quad (\text{traslación}),$$

$$(c) \quad z' - z_1 = \frac{1}{z''' - z_1} \quad (\text{inversión}).$$

Sea S_2 el conjunto de círculos tangentes a la línea que pasa por z_1 en la dirección del arco h , y sea S_1 el sistema ortogonal de círculos. Por (a), un círculo del conjunto S_2 se convierte en una línea paralela al arco h . Por (b), esta línea se convierte en sí misma. Por (c), mandamos la línea otra vez a su círculo original. En consecuencia los círculos S_2 son invariables.

Un círculo del conjunto S_1 se convierte, por (a), en una línea perpendicular al arco h , (b) entonces lo lleva a alguna otra línea perpendicular al arco h , y (c) invierte esta línea en otro círculo del conjunto S_1 . En consecuencia los círculos S_1 están permutados.

5.61. Sumario de los casos 1 y 2.

Caso	m	μ	Invariable	Permutado
Elíptica	1	$\neq 0, \pi$	S_1	S_2
Hiperbólica	$\neq 1$	$0, \pi$	S_2	S_1
Idéntica	1	0	todos los puntos	
Involución de Möbius	1	π	S_1, S_2	
Loxodrómica	$\neq 1$	$\neq 0, \pi$		S_1, S_2
Parabólica			S_2	S_1

5.62. Caso 3: Integral no parabólica. Esta transformación puede ser escrita en la forma

$$z' = az + b, \quad a \neq 0, 1.$$

Sea z_1 el punto fijo finito. Entonces tenemos

$$z' - z_1 = a(z - z_1).$$

Sea

$$z' - z_1 = r' \operatorname{cis} \theta', \quad z - z_1 = r \operatorname{cis} \theta, \quad a = m \operatorname{cis} \mu.$$

A. $m = 1$, $\mu \neq 0, \pi$ (caso elíptico). Aquí tenemos

$$r' = r, \quad \theta' = \theta + \mu, \quad \mu \neq 0, \pi.$$

En consecuencia

- (1) los círculos S_1 son invariables,
- (2) las líneas S_2 están permutadas.

B. $m \neq 1$, $\mu = 0, \pi$ (caso hiperbólico). Aquí tenemos

$$r' = mr, \quad m \neq 1, \quad \theta' = \theta \quad \text{or} \quad \theta' = \theta + \pi.$$

En consecuencia

- (1) los círculos S_1 están permutados,
- (2) las líneas S_2 son invariables.

C. $m = 1$, $\mu = \pi$ (caso de la involución de Möbius). Aquí tenemos

$$r' = r, \quad \theta' = \theta + \pi.$$

En consecuencia

- (1) los círculos S_1 son invariables,
- (2) las líneas S_2 son invariables, rayo para rayo opuesto.

Así todo punto en el plano es transformado en su reflexión en el punto fijo. En consecuencia la transformación es involutórica. (Hay que notar que podemos no tener $m = 1$ y $\mu = 0$ y nos lleva a $a = 1$.)

D. $m \neq 1$, $\mu \neq 0, \pi$ (caso loxodrómico). Aquí tenemos

$$r' = mr, \quad m \neq 1, \quad \theta' = \theta + \mu, \quad \mu \neq 0, \pi.$$

En consecuencia

- (1) los círculos S_1 están permutados,
- (2) las líneas S_2 están permutadas.

5.63. Teorema. La única transformación lineal integral involutórica, excepto la identidad, es la involución de Möbius.

Demostración: Tenemos

$$z' = az + b, \quad a \neq 0.$$

Si ésta ha de ser involutórica, entonces debemos tener

$$z = az' + b.$$

Esto es,

$$a^2 z + ab + b = z,$$

o

$$z(a^2 - 1) + b(a + 1) = 0,$$

de lo cual

$$a = -1 \quad \text{o} \quad b = 0 \quad \text{y} \quad a = 1.$$

5.64. Teorema. El conjunto de las espirales equiangulares alrededor de z_1 ,

$$r = ke^{[(\log m)/\mu]\theta},$$

donde k es un parámetro, es invariable durante el caso loxodrómico.

Demostración: Exactamente igual a la del Art. 5.59.

5.65. Caso 4: Integral parabólica. Esta transformación es la traslación

$$z' = z + b.$$

Notamos que (1) cualquier familia de líneas rectas paralelas está permutada, y (2) líneas paralelas a la dirección de la traslación, o también arco b , son invariables.

5.66. Sumario de los casos 3 y 4.

Caso	m	μ	Invariable	Permutada
Elíptica	1	$\neq 0, \pi$	S_1	S_2
Hiperbólica	$\neq 1$	$0, \pi$	S_2	S_1
Parabólica	1	0	S_2	S_1
Involución de Möbius	1	π	S_1, S_2	
Loxodrómica	$\neq 1$	$\neq 0, \pi$		S_1, S_2

Elíptica	$z' = \text{cis } \mu z + b$	rot. y trans.
Hiperbólica	$z' = az + b, a \text{ real}$	alarg. y trans.
Parabólica	$z' = z + b$	trans. o identidad
Invol. de Möbius	$z' = -z + b$	rot. 180° y trans.
Loxodrómica	$z' = az + b, a \text{ compleja}$	rot., alarg. y trans.

5.67. Teorema. Para el caso 1 tenemos

$$\Delta = 2 + \left(m + \frac{1}{m}\right) \cos \mu + i \left(m - \frac{1}{m}\right) \text{sen } \mu,$$

donde

$$\Delta \equiv \frac{(a+d)^2}{ad-bc}.$$

Demostración: Tenemos

$$\begin{aligned} K + \frac{1}{K} &= m(\cos \mu + i \text{sen } \mu) + \frac{1}{m}(\cos \mu - i \text{sen } \mu) \\ &= \left(m + \frac{1}{m}\right) \cos \mu + i \left(m - \frac{1}{m}\right) \text{sen } \mu. \end{aligned} \quad (1)$$

También,

$$\begin{aligned} K + \frac{1}{K} &= \frac{a+d-\sqrt{S}}{a+d+\sqrt{S}} + \frac{a+d+\sqrt{S}}{a+d-\sqrt{S}} \\ &= \frac{2(a+d)^2 + 2(a-d)^2 + 8bc}{(a+d)^2 - (a-d)^2 - 4bc} \\ &= \frac{4a^2 + 4d^2 + 8bc}{4(ad-bc)} \\ &= \frac{(a+d)^2 + 2(bc-ad)}{ad-bc} \\ &= \Delta - 2. \end{aligned} \quad (2)$$

El teorema ahora se sigue de (1) y (2).

5.68. Clasificación de transformaciones bilineales en función de a, b, c, d

Caso 1

A. *Caso elíptico:* $m = 1, \mu \neq 0, \pi$. En consecuencia

$$\Delta = 2 + 2 \cos \mu = 4 \cos^2 \frac{\mu}{2},$$

o

$$0 < \Delta < 4.$$

B. *Caso hiperbólico:* $m \neq 1, (a) \mu = 0, (b) \mu = \pi$. Tenemos

$$(a) \Delta = 2 + \left(m + \frac{1}{m}\right) > 4,$$

$$(b) \Delta = 2 - \left(m + \frac{1}{m}\right) < 0.$$

D. *Caso de involución de Möbius:* $m = 1, \mu = \pi$.

$$\Delta = 0.$$

E. *Caso loxodrómico:* $m \neq 1, \mu \neq 0, \pi$.

Δ compleja

Caso 2

Aquí tenemos

$$S = (a-d)^2 + 4bc = 0.$$

En consecuencia

$$(a-d)^2 + 4ad = 4(ad-bc),$$

o

$$\frac{(a+d)^2}{ad-bc} = 4,$$

o

$$\Delta = 4.$$

Casos 3 y 4

Los resultados aquí están de acuerdo con, y siguen de, los casos anteriores usando la condición añadida de que $c = 0$. Para el caso integral general es

$$z' = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, \quad d \neq 0,$$

cuyo punto fijo es

$$z_1 = -b(a-d).$$

En consecuencia la transformación en función del punto fijo se convierte en

$$z' - z_1 = \frac{a}{d}(z - z_1).$$

Ahora, el caso no integral en función de sus puntos fijos es

$$\frac{z' - z_1}{(z'/z_2) - 1} = K \frac{z - z_1}{(z/z_2) - 1},$$

de lo cual, haciendo $z_2 \rightarrow \infty$,

$$z' - z_1 = K(z - z_1),$$

donde

$$K = \frac{a + d - (d - a)}{a + d + (d - a)} = \frac{a}{d},$$

habiendo escogido $\sqrt{S} = d - a$. Esto prueba una proposición.

En consecuencia tenemos

Caso	Δ
Elíptica	$0 < \Delta < 4$
Hiperbólica	$\Delta < 0, \Delta > 4$
Parabólica	$\Delta = 4$
Involución de Möbius	$\Delta = 0$
Loxodrómica	Δ compleja

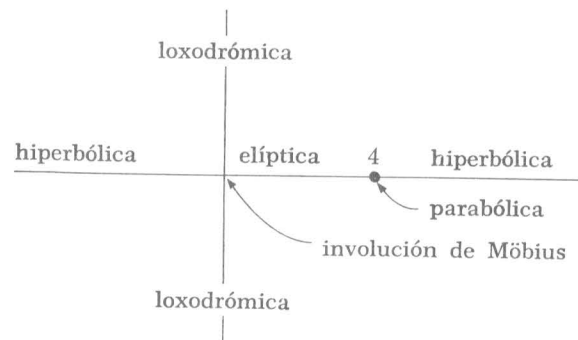


FIGURA 5.6

RELACION CRUZADA

5.69. Definición. La *relación cruzada* de cuatro puntos z_1, z_2, z_3, z_4 , en ese orden, está dada por

$$(z_1 z_2 z_3 z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_4 - z_1}.$$

5.70. Teorema. Las veinticuatro posibles relaciones cruzadas de los cuatro puntos z_1, z_2, z_3, z_4 , se reducen, en general, a seis en número, dadas por

$$\lambda, 1/\lambda, 1 - \lambda, 1/(1 - \lambda), \lambda/(\lambda - 1), (\lambda - 1)/\lambda.$$

Demostración: La demostración de este teorema es esencialmente la misma que la dada para cuatro puntos colineales reales.

5.71. Teorema. La transformación bilineal determinada por tres parejas distintas de puntos $z_1, z_1'; z_2, z_2'; z_3, z_3'$, es

$$(z' z_1' z_2' z_3') = (z z_1 z_2 z_3).$$

Demostración: Por el Art. 5.44.

5.72. Teorema. La transformación bilineal determinada por los puntos fijos z_1, z_2 y otra pareja de puntos correspondientes z_3, z_3' , es

$$(z' z_1 z_2 z_3') = (z z_1 z_2 z_3).$$

Demostración: Por el Art. 5.71.

5.73. Teorema. La transformación bilineal determinada por los puntos fijos z_1, z_2 y la invariante K es

$$(z' z_1 z_2 z_2) = K.$$

Demostración: Por (1) del Art. 5.46.

5.74. Teorema. Cuatro puntos z_1, z_2, z_3, z_4 , son concíclicos, con z_1, z_3 entre z_2, z_4 , si y sólo si $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ es real y positiva.

Demostración: Formemos la transformación bilineal determinada por los puntos z_2, z_4 , como puntos fijos y con la invariante

$$K = (z_1 z_2 z_3 z_4).$$

La transformación es, por el Art. 5.73,

$$(z' z_2 z_4 z_4) = (z_1 z_2 z_3 z_4). \quad (1)$$

Ya que K es real, la transformación es hiperbólica o involutórica (véase el Art. 5.61). En consecuencia los círculos S_2 por los puntos fijos z_2, z_4 , son invariables. Tomemos el círculo de este conjunto que pasa por z_3 . Ahora, por (1), z_3 debe ir a z_1 . Por lo tanto, z_1 también cae en el círculo. Más aún, ya que $K > 0$,

($\mu = 0$), z_1, z_3 caen en el mismo arco. En consecuencia z_1, z_3 caen entre z_2, z_4 .

A la inversa, si z_1, z_2, z_3, z_4 caen en un círculo, se establece la transformación bilineal (1). Entonces el círculo es un S_2 , y como z_1 corresponde a z_3 , este círculo debe ser uno invariable. Por lo tanto, la transformación es hiperbólica o involutórica y K es real. Más aún, si z_1, z_3 caen entre z_2, z_4 , entonces $\theta' = \theta$ y $\mu = 0$. En consecuencia K es también positiva.

5.75. Definición. Se dice que cuatro puntos z_1, z_2, z_3, z_4 , son *ortocíclicos* si z_1 y z_3 caen en un círculo en el que z_2 y z_4 son inversos.

5.76. Teorema. Cuatro puntos z_1, z_2, z_3, z_4 , son ortocíclicos si y sólo si $|(z_1 z_2 z_3 z_4)| = 1$.

Demostración: Establecemos la transformación bilineal teniendo z_2, z_4 como puntos fijos y con la invariante

$$K = (z_1 z_2 z_3 z_4).$$

La transformación es

$$(z' z_2 z z_4) = (z_1 z_2 z_3 z_4). \quad (1)$$

Ya que $|K| \equiv m = 1$, esta transformación es elíptica o involutórica (véase el Art. 5.61). En consecuencia los círculos S_1 alrededor de z_2, z_4 son invariantes. Tomemos el círculo particular de este conjunto que pasa por z_3 . Ahora, por (1), z_3 debe ir a z_1 . Por lo tanto z_1 también cae en este círculo, y los puntos z_1, z_2, z_3, z_4 , son ortocíclicos.

A la inversa, si z_1, z_2, z_3, z_4 , son ortocíclicos, establecen la transformación (1). Entonces el círculo por z_1 y z_3 teniendo a z_2 y z_4 como puntos inversos es un círculo S_1 , y ya que z_1 corresponde a z_3 , este círculo debe ser uno invariable. Por lo tanto, la transformación es elíptica o involutórica, de lo cual $|K| = 1$.

5.77. Definición. Se dice que cuatro puntos z_1, z_2, z_3, z_4 son *armónicos* si son concíclicos y ortocíclicos.

5.78. Teorema. Cuatro puntos z_1, z_2, z_3, z_4 son armónicos si y sólo si $(z_1 z_2 z_3 z_4) = -1$.

Demostración: Es claro que si z_1, z_2, z_3, z_4 son concíclicos y ortocíclicos, entonces z_2, z_4 deben separar a z_1, z_3 . Ahora sea

$$(z_1 z_2 z_3 z_4) = m \operatorname{cis} \mu.$$

Entonces, como z_1, z_2, z_3, z_4 , son ortocíclicos por el Art. 5.76,

$$(z_1 z_2 z_3 z_4) = m = 1. \quad (1)$$

También, ya que z_1, z_2, z_3, z_4 , son concíclicos con z_2, z_4 *separando* z_1, z_3 , por el Art. 5.74, $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ es real y negativa; o sea,

$$\mu = \pi. \quad (2)$$

Por lo tanto, combinando (1) y (2), tenemos

$$(z_1 z_2 z_3 z_4) = -1.$$

A la inversa, si $(z_1 z_2 z_3 z_4) = -1$, entonces $m = 1$, $\mu = \pi$, y los puntos son tanto ortocíclicos como concíclicos, esto es, armónicos.

5.79. Sumario de los artículos 5.74, 5.76 y 5.78.

Concíclicos, z_1, z_3 entre z_2, z_4	$(z_1 z_2 z_3 z_4) > 0$
Concíclicos, z_1, z_3 separando z_2, z_4	$(z_1 z_2 z_3 z_4) < 0$
Ortocíclicos	$ (z_1 z_2 z_3 z_4) = 1$
Armónicos	$(z_1 z_2 z_3 z_4) = -1$

5.80. Teorema. La relación cruzada de cuatro puntos ordenados es invariante durante cualquier transformación bilineal.

Demostración: La transformación que manda los tres puntos z_2, z_3, z_4 , a z'_2, z'_3, z'_4 , es por el Art. 5.71

$$(z' z'_2 z'_3 z'_4) = (z z_2 z_3 z_4). \quad (1)$$

Ahora, si el cuarto punto z_1 va a z'_1 , tenemos, de (1),

$$(z'_1 z'_2 z'_3 z'_4) = (z_1 z_2 z_3 z_4),$$

y el teorema está demostrado.

5.81. Teorema. Puntos concíclicos, ortocíclicos y armónicos se transforman en puntos concíclicos, ortocíclicos y armónicos bajo una transformación bilineal.

Demostración: Por el Art. 5.80.

PROYECTANDO PLANIMETRICAMENTE EL CIRCULO UNITARIO EN UNA LINEA RECTA

5.82. Teorema. La transformación bilineal

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad c \neq 0 \quad (1)$$

lleva al círculo unitario del plano z' a una línea recta si y sólo si $|a| = |c|$.

Demostración: La transformación (1) puede descomponerse en

- (a) $z_1 = cz' - a$ (alargamiento-rotación-traslación)
- (b) $z_2 = 1/z_1$ (inversión en el círculo unitario)
- (c) $z_3 = z_2$ (reflexión)
- (d) $z_4 = \frac{bc - ad}{c} z_3$ (alargamiento-rotación)
- (e) $z = -\frac{d}{c} + z_4$ (traslación)

Ahora, de (a) tenemos $z' = (z_1 + a)/c$. En consecuencia el círculo unitario $|z'| = 1$ se transforma por (a) en el círculo.

$$|z_1 + a| = |c|, \quad (2)$$

lo que a su vez se transforma por (b) y las transformaciones subsecuentes, en una línea recta o un círculo apropiado dependiendo de si (2) pasa o no pasa por el origen. Por lo tanto, una condición necesaria y suficiente para que el círculo unitario del plano z' se transforme por (1) en una línea recta, es que el círculo (2) se satisfaga por $z_1 = 0$, o que

$$|a| = |c|.$$

Alternativa: La transformación lleva a un círculo C del plano z' a una línea recta si y sólo si el punto $z' = a/c$ está en C . Si C es el círculo unitario, entonces tenemos $|a/c| = 1$ o $|a| = |c|$.

5.83. Teorema. Los coeficientes de una transformación bilineal que lleva al eje real hacia sí mismo, pueden siempre tomarse como reales.

Demostración: Para que el eje real vaya a sí mismo, requerimos que tres puntos reales distintos A, B, C , vayan a tres puntos reales distintos A', B', C' . Por el Art. 5.70, esta transformación es

$$(z'A'B'C') = (zABC).$$

Obviamente todos los coeficientes son reales. En consecuencia el teorema.

CAPITULO 6

La Función $z' = z^n$, n un Entero Positivo

FUNCIONES AUTOMORFAS

6.01. Definición. Una función de valor único $z' = f(z)$ es llamada *periódica* cuando hay una constante $p \neq 0$ tal que $f(z + p) = f(z)$ para todos los valores de z .

6.02. Definición. Una función $z' = f(z)$ que permanece inalterada cuando sustituimos en ella una función lineal definitiva de z en lugar de z es llamada una función *automorfa*.

6.03. Teorema. Una función periódica es una función automorfa.

Demostración: La función lineal es $z + p$, p una constante.

6.04. Definición. Una región en la que una función de valor único z' de z toma todos sus valores una vez y sólo una es llamada una *región fundamental* para esta función.

6.05. Teorema. Si una región fundamental de una función automorfa de valor único es proyectada planimétricamente sobre otra región por medio de una de las transformaciones lineales de la función hacia sí misma, entonces esta segunda región no puede sobreponerse en ninguna parte a la primera; es también una región fundamental de la función automorfa.

Demostración: Por los Arts. 6.02 y 6.04.

6.06. Teorema. Las transformaciones lineales bajo las cuales una función automorfa permanece inalterada, forman un grupo.

LA TRANSFORMACION $z' = z^2$

6.07. Teorema. La función $z' = z^2$ es de valor único y continuo a través del plano z .

Demostración: Ver el Art. 2.23.

6.08. Teorema. La función $z' = z^2$ es automorfa; es invariante durante la transformación lineal donde z es reemplazada por $-z$.

6.09. Teorema. Durante la transformación $z' = z^2$:

- (a) círculos con centro en el origen van a círculos con centro en el origen;
- (b) círculo unitario va a círculo unitario;
- (c) rayos por el origen van a rayos por el origen;
- (d) el eje real positivo va al eje real positivo;
- (e) líneas paralelas al eje imaginario van a parábolas confocales con foco en el origen, eje real como eje y abriéndose hacia la izquierda;
- (f) líneas paralelas al eje real van a parábolas confocales con foco en el origen, eje real como eje y abriéndose hacia la derecha;
- (g) hipérbolas rectangulares con asíntotas en los ejes coordenados van a líneas paralelas al eje real;
- (h) hipérbolas rectangulares con ejes transversales y conjugados en los ejes coordenados van a líneas paralelas al eje imaginario.

Demostración: Sea $z = r \operatorname{cis} \theta$ y $z' = r' \operatorname{cis} \theta'$. Entonces

$$r' = r^2, \quad \theta' = 2\theta \quad (1)$$

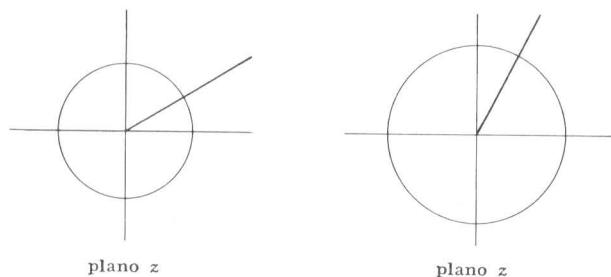


FIGURA 6.1

Los resultados (a), (b), (c) y (d), siguen de la relación (1). Hay que notar que la distorsión aumenta a medida que nos alejamos del círculo unitario. Véase la Fig. 6.1.

Sean $z = x + iy$ y $z' = x' + iy'$. Entonces

$$x' = x^2 - y^2 \quad y \quad y' = 2xy. \quad (2)$$

Por (2), vemos que

$$x = \pm c \rightarrow y'^2 = -4c^2x' + 4c^4$$

y

$$y = \pm c \rightarrow y'^2 = 4c^2x' + 4c^4.$$

Esto nos da los resultados (e) y (f). Véase la Fig. 6.2.

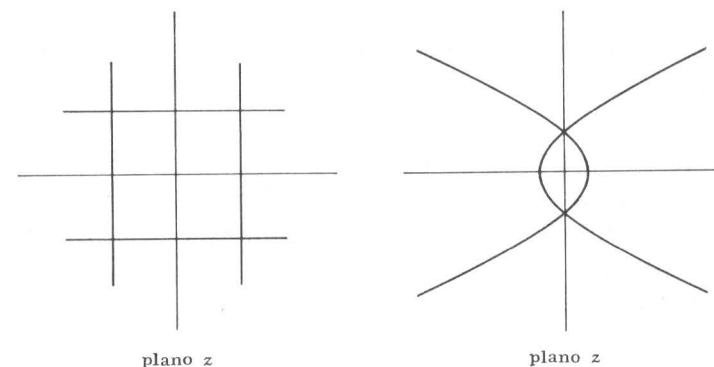


FIGURA 6.2

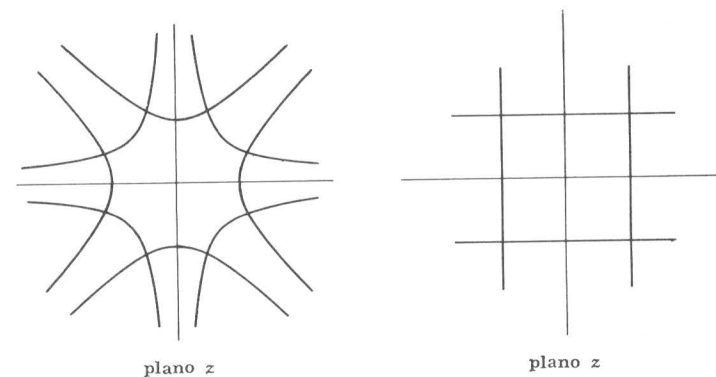


FIGURA 6.3

También, por (2), encontramos

$$x^2 - y^2 = \pm c \rightarrow x' = \pm c$$

y

$$2xy = \pm c \rightarrow y' = \pm c.$$

Esto nos da los resultados (g) y (h). Véase la Fig. 6.3.

6.10. Lema. Si existen $\lim z$ y $\lim z \neq 0$, entonces

$$\lim \operatorname{arc} z = \operatorname{arc} \lim z, \quad (1)$$

$$\lim |z| = |\lim z|. \quad (2)$$

Demostración: Esto es aparente geoméricamente si hacemos que z tienda al punto finito z_0 no en el origen; (2) se mantiene hasta si $z_0 = 0$ o ∞ .

6.11. Teorema. La transformación $z' = z^2$ es directamente conforme en todos los puntos excepto el origen y el punto infinito.

Demostración: Sean (1) y (2), véase Fig. 6.4, dos curvas cualesquiera en el plano z intersectándose en un punto $z_0 \neq 0, \infty$. Sea α el ángulo entre (1) y (2). También, sean (1') y (2') las transformadas de (1) y (2) en el plano z' , y sea z'_0 el correspondiente de z_0 .

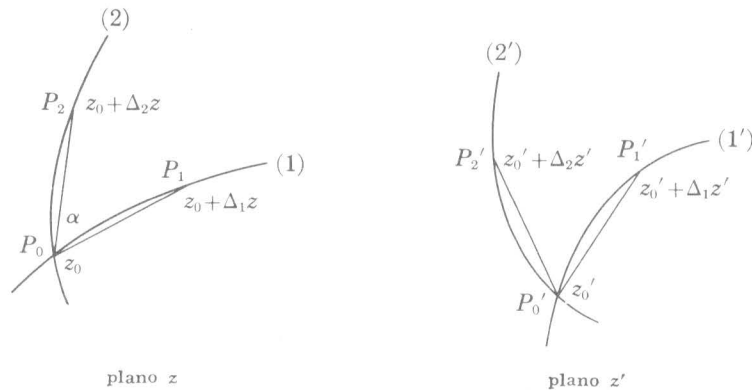


FIGURA 6.4

Seleccionamos los puntos $P_1: z_0 + \Delta_1 z$ y $P_2: z_0 + \Delta_2 z$ en las curvas (1) y (2), respectivamente, adyacentes a $P_0: z_0$. Sean

los correspondientes de P_1 y P_2 , $P'_1: z'_0 + \Delta_1 z'$, $P'_2: z'_0 + \Delta_2 z'$. Ahora

$$\begin{aligned} \angle P_1 P_0 P_2 &= \operatorname{arc} (z_0 + \Delta_2 z - z_0) - \operatorname{arc} (z_0 + \Delta_1 z - z_0) \\ &= \operatorname{arc} \Delta_2 z - \operatorname{arc} \Delta_1 z \\ &= \operatorname{arc} \Delta_2 z / \Delta_1 z. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{\substack{\Delta_1 z \rightarrow 0 \\ \Delta_2 z \rightarrow 0 \\ \text{a lo largo de las curvas}}} \angle P_1 P_0 P_2 \\ &= \lim \operatorname{arc} \frac{\Delta_2 z}{\Delta_1 z}. \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} z'_0 + \Delta_1 z' &= (z_0 + \Delta_1 z)^2 \\ &= z_0^2 + 2z_0 \Delta_1 z + (\Delta_1 z)^2, \end{aligned}$$

de lo cual

$$\Delta_1 z' = \Delta_1 z (2z_0 + \Delta_1 z).$$

De una manera semejante,

$$\Delta_2 z' = \Delta_2 z (2z_0 + \Delta_2 z).$$

En consecuencia

$$\frac{\Delta_2 z'}{\Delta_1 z'} = \frac{\Delta_2 z}{\Delta_1 z} \cdot \frac{2z_0 + \Delta_2 z}{2z_0 + \Delta_1 z},$$

de lo cual

$$\operatorname{arc} \frac{\Delta_2 z'}{\Delta_1 z'} = \operatorname{arc} \frac{\Delta_2 z}{\Delta_1 z} + \operatorname{arc} \frac{2z_0 + \Delta_2 z}{2z_0 + \Delta_1 z}.$$

Tomando límites, encontramos, usando el Art. 6.10,

$$\lim \operatorname{arc} \frac{\Delta_2 z'}{\Delta_1 z'} = \lim \operatorname{arc} \frac{\Delta_2 z}{\Delta_1 z} + \lim \operatorname{arc} \frac{2z_0 + \Delta_2 z}{2z_0 + \Delta_1 z}.$$

En consecuencia

$$\lim \operatorname{arc} \frac{\Delta_2 z'}{\Delta_1 z'} = \alpha.$$

Así las transformadas (1') y (2') se intersectan con un ángulo $\alpha' = \alpha$.

En $z_0 = 0$ o ∞ no existe conformidad. En estos puntos tenemos $\alpha' = 2\alpha$. Ver (1) del Art. 6.09 para demostración de

esto en $z_0 = 0$. Lo mismo es verdad para $z_0 = \infty$, ya que líneas rectas por el origen van a líneas rectas por el origen, y dos líneas rectas (círculos con radio infinito) que se intersectan con un ángulo θ se intersectan en el infinito con el mismo ángulo θ .

6.12. Definición. Los puntos excepcionales en una transformación conformante, donde lo conformante desaparece, se conocen como *puntos críticos*.

6.13. Teorema. La transformación $z' = z^2$ tiene dos y sólo dos puntos críticos: $z = 0$ y $z = \infty$.

6.14. Teorema (alternativa del Art. 6.11). La transformación $z' = z^2$ es directamente conformante en todos los puntos excepto el origen y el punto infinito.

Demostración: Sean (1) y (1') —ver Fig. 6.5— las curvas correspondientes en los planos z y z' , respectivamente. Sean z_0 , z'_0 y $z_0 + \Delta z$, $z'_0 + \Delta z'$ una pareja de puntos correspondientes en estas curvas. Ahora pongamos al plano z' sobre el plano z , manteniendo sus ejes paralelos a los del plano z y de tal modo que z'_0 caiga en z_0 .

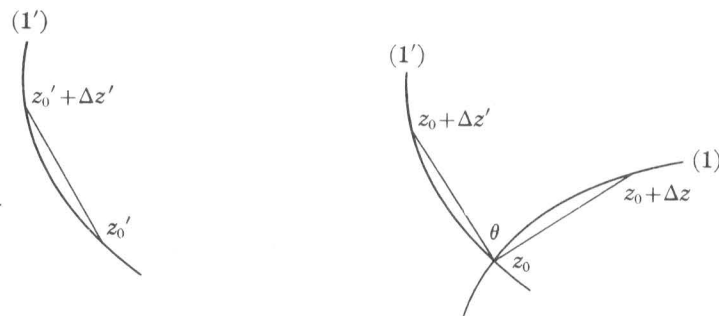


FIGURA 6.5

Ahora

$$\Delta z' = \Delta z(2z_0 + \Delta z).$$

En consecuencia

$$\operatorname{arc} \frac{\Delta z'}{\Delta z} = \operatorname{arc} (2z_0 + \Delta z).$$

Tomando límites, tenemos, donde $z_0 \neq 0, \infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{arc} \frac{\Delta z'}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{arc} (2z_0 + \Delta z) \\ &= \operatorname{arc} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z_0 + \Delta z) \quad \text{por el Art. 6.10} \\ &= \operatorname{arc} (2z_0) \\ &= \text{constante, } \theta, \text{ digamos.} \end{aligned}$$

Así (1) y (1') se intersectan con un ángulo θ . De un modo semejante, el ángulo entre otras dos curvas correspondientes cualesquiera (2) y (2') por z_0 se intersectan con el mismo ángulo θ . En consecuencia (1) y (2) se intersectan con el mismo ángulo que (1') y (2').

FUNCIONES MONOGENICAS

6.15. Definición. Sea $z' = f(z)$ una función de valor único de z . Si

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left. \frac{\Delta z'}{\Delta z} \right|_{z=z_0} \text{ en cualquier modo}$$

existe, entonces este límite es llamado la *derivada de z' con respecto a z en $z = z_0$* , y se escribe como

$$D_z z' \big|_{z=z_0}.$$

6.16. Teorema. Sean $w = w(z)$, $v = v(z)$ funciones de valor único de z . Entonces

- (a) $D_z(w \pm v) = D_z w \pm D_z v$;
- (b) $D_z(wv) = w D_z v + v D_z w$;
- (c) $D_z(w/v) = \frac{v D_z w - w D_z v}{v^2}$, $v \neq 0$;
- (d) $D_z(z^n) = n z^{n-1}$, n un entero positivo.

Demostración: Las mismas demostraciones que las dadas en los cálculos de reales se mantienen aquí.

6.17. Definición. Una función $z' = f(z)$ es *monogénica* en $z = z_0$ si $D_z z' \big|_{z=z_0}$ existe y es finita.

6.18. Teorema. Una función monogénica en $z = z_0$ es conformante en z_0 si $D_z z' \big|_{z=z_0} \neq 0$.

Demostración: Como en el Art. 6.14,

$$\theta = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{arc} \frac{\Delta z'}{\Delta z} = D_z z' |_{z=z_0} \\ = \text{constante} \neq 0, \infty.$$

etcétera.

LA TRANSFORMACION $z' = z^n$, n UN ENTERO POSITIVO

6.19. Teorema. La función $z' = z^n$ es de valor único, automorfa, monogénica y conformante en todas partes excepto en $z = 0$ y $z = \infty$.

CAPITULO 7

Superficies de Riemann

DEFINICIONES

7.01. Nota. Una *superficie de Riemann* es un dispositivo usado para hacer la correspondencia entre valores de una variable z y los correspondientes valores de una función de valuación múltiple w de z geoméricamente 1-1. En general, en una correspondencia 1- n , reemplazamos el plano z por una superficie de Riemann de n hojas, convenientemente "cosidas", haciendo así la correspondencia 1-1. El mejor modo de hacer clara la idea de una superficie de Riemann es por medio de una serie de ejemplos.

7.02. Definiciones. Un *punto de ramificación* es un punto z_0 donde una función de valuación múltiple w de z tiene la doble propiedad de que

- (a) dos o más valores de w se hacen iguales,
- (b) cuando z describe, una vez, un pequeño círculo con centro en z_0 , w no describe una curva cerrada alrededor de w_0 .

Un punto que satisface (a) pero no (b) se llama *punto nodal*. Los puntos nodal y de ramificación son llamados *puntos singulares*.

FUNCIONES ALGEBRAICAS SIMPLES EN SUPERFICIES DE RIEMANN

7.03. Ejemplo 1: $w^2 = z$. La correspondencia entre z y w es 1-2. De acuerdo con esto, suponemos una superficie de Rie-

mann extendida a dos para reemplazar al plano z . Los valores de w son iguales cuando $z = 0$ o ∞ . Ahora sea

$$w = R \operatorname{cis} \Theta, \quad z = r \operatorname{cis} \theta.$$

Entonces

$$R = \sqrt{r}, \quad \Theta = \frac{1}{2}\theta.$$

71

En consecuencia, al describir z un pequeño círculo alrededor de $z = 0$, el arco w es incrementado solamente π , y w no ha descrito una curva cerrada alrededor de $w = 0$. Por lo tanto, $z = 0$ es un punto de ramificación. Ahora, el hecho de que en esta transformación las líneas rectas que pasan por el origen se proyectan como líneas rectas que pasan por el origen, y debido a que dos líneas rectas que se intersectan con un ángulo α se intersectan en ∞ con el mismo ángulo α , se demuestra que ∞ es también un punto de ramificación. Ahora, mientras z se desplaza alrededor de $z = 0$ una cantidad 2π , w se habrá desplazado alrededor de $w = 0$ una cantidad π . En consecuencia, para hacer la correspondencia 1-1, imaginamos, mientras que w continúa desde π a 2π , que z baja por una rampa y se desplaza otro circuito alrededor de $z = 0$ en un segundo plano justo debajo del primero. Pero w ahora ha descrito una curva cerrada alrededor de $w = 0$. En consecuencia, para hacer que z describa una curva cerrada alrededor de $z = 0$, imaginamos que en 4π , z sube por una rampa hasta el primer plano otra vez. Ahora vemos que cualquier línea que no se corta a sí misma y que une $z = 0$ con $z = \infty$ puede tomarse como el lugar geométrico a lo largo del cual ocurren las rampas. Así, el cruzar esta línea en el plano z lleva a un punto de una hoja

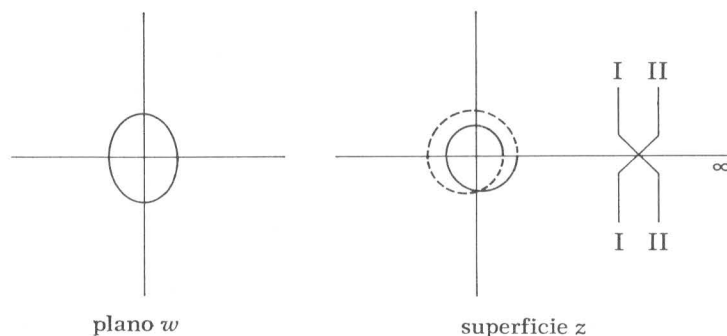


FIGURA 7.1

a la otra. Dicha línea es conocida como una *línea de ramificación*. En la Fig. 7.1 hemos escogido el eje real positivo como línea de ramificación. Hay que notar que los extremos de la línea de ramificación son puntos de ramificación. Dicha superficie, que está compuesta de dos o más hojas pegadas en los puntos de ramificación y permitiendo el paso de una a otra por las líneas de ramificación, es conocida como la superficie de Riemann. Si les designamos a las hojas los números I, II, etc., entonces el símbolo que aparece en la línea de ramificación en la Fig. 7.1 claramente nos informa de la dirección en que nos llevará una rampa cuando crucemos la línea de ramificación.

7.04. Ejemplo 2: $w^3 = z$. La correspondencia de z con w es 1-3. En consecuencia reemplazamos el plano z por una superficie de Riemann de tres hojas. Claramente, un arreglo como el mostrado en la Fig. 7.2 cubrirá los requisitos.

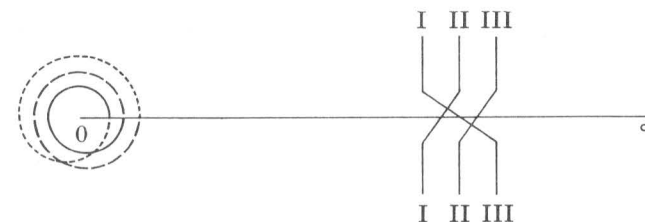


FIGURA 7.2

7.05. Ejemplo 3: $w^2 = (z - a)(z - b)$, ($a \neq b$). Sean

$$z - a = r_1 \operatorname{cis} \theta_1 \quad \text{y} \quad z - b = r_2 \operatorname{cis} \theta_2.$$

Entonces

$$(z - a)(z - b) = r_1 r_2 \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2).$$

En consecuencia

$$w_1 = \sqrt{r_1 r_2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right),$$

$$w_2 = \sqrt{r_1 r_2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \pi \right).$$

Ahora, $w_1 = w_2$ si y sólo si $z = a, b, \infty$. En consecuencia, a, b, ∞ son puntos de unión.

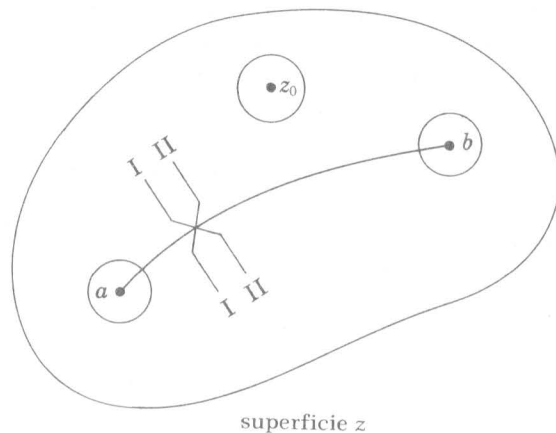


FIGURA 7.3

(a) Hagamos que z describa un pequeño círculo alrededor de $z_0 \neq a, b$.

θ_1 se convierte en θ_1 y θ_2 se convierte en θ_2 .

En consecuencia w vuelve a la misma hoja, o el círculo corta las líneas de ramificación un número par de veces.

(b) Hagamos que z describa un pequeño círculo alrededor de a (o b).

θ_1 se convierte en $\theta_1 + 2\pi$ y θ_2 se convierte en θ_2 .

En consecuencia w pasa de una hoja a la otra, o el círculo cruza las líneas de ramificación un número impar de veces.

(c) Hagamos que z describa un pequeño círculo alrededor de a y b .

θ_1 se convierte en $\theta_1 + 2\pi$ y θ_2 se convierte en $\theta_2 + 2\pi$.

En consecuencia w no cambia de hoja, o el círculo cruza las líneas de ramificación un número par de veces.

Claramente, una línea de ramificación que conecte a con b , como se indica en la Fig. 7.3, satisfará estos requisitos. Vemos que ∞ es sólo un punto nodal. (Podríamos haber conectado a y b a través del ∞ .)

7.06. Ejemplo 4: $w^2 = (z - a)(z - b)(z - c)$, ($a \neq b, b \neq c, c \neq a$).

Sean

$$z - a = r_1 \operatorname{cis} \theta_1, \quad z - b = r_2 \operatorname{cis} \theta_2, \quad z - c = r_3 \operatorname{cis} \theta_3.$$

Entonces

$$w_1 = \sqrt{r_1 r_2 r_3} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{2} \right),$$

$$w_2 = \sqrt{r_1 r_2 r_3} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{2} + \pi \right).$$

Ahora, $w_1 = w_2$ si y sólo si $z = a, b, c, \infty$. En consecuencia a, b, c, ∞ son puntos de unión.

(a) Hagamos que z describa un pequeño círculo alrededor de $z_0 \neq a, b, c$.

$$\theta_1 \rightarrow \theta_1, \quad \theta_2 \rightarrow \theta_2, \quad \theta_3 \rightarrow \theta_3.$$

En consecuencia w no cambia de hojas, o el círculo corta las líneas de ramificación un número par de veces.

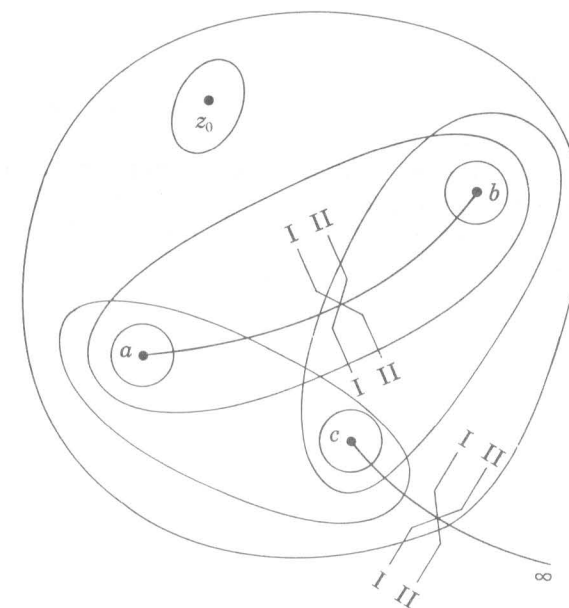


FIGURA 7.4

(b) Hagamos que z describa un pequeño círculo alrededor de a , (o b , o c).

$$\theta_1 \rightarrow \theta_1 + 2\pi, \quad \theta_2 \rightarrow \theta_2, \quad \theta_3 \rightarrow \theta_3.$$

En consecuencia w cambia de hojas, o el círculo corta las líneas de ramificación un número impar de veces. Entonces a , b , c son puntos de ramificación.

(c) Hagamos que z describa un círculo alrededor de a y b (o b y c , o c y a).

$$\theta_1 \rightarrow \theta_1 + 2\pi, \quad \theta_2 \rightarrow \theta_2 + 2\pi, \quad \theta_3 \rightarrow \theta_3.$$

En consecuencia w no cambia de hojas, o el círculo corta las líneas de ramificación un número par de veces.

(d) Hagamos que z describa un círculo alrededor de a , b , c .

$$\theta_1 \rightarrow \theta_1 + 2\pi, \quad \theta_2 \rightarrow \theta_2 + 2\pi, \quad \theta_3 \rightarrow \theta_3 + 2\pi.$$

En consecuencia w cambia de hojas, o el círculo cruza las líneas de ramificación un número impar de veces. Así ∞ es un punto de ramificación.

Claramente, una línea de ramificación que una a con b y otra que una c con ∞ , como se indica en la Fig. 7.4, satisfarán los requisitos. (O podríamos conectar a , b , c con ∞ , etc.)

7.07. Ejemplo 5: $w^2 = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n)$, ($a_i \neq a_j$).

(a) Sea $n = 2p$. Entonces las líneas de ramificación pueden escogerse uniendo a_1 con a_2 , a_3 con a_4 , $\cdots$, a_{n-1} con a_n . Habrá p líneas de ramificación y $2p$ puntos de ramificación; ∞ es un punto nodal.

(b) Sea $n = 2p + 1$. Entonces las líneas de ramificación pueden escogerse uniendo a_1 con a_2 , a_3 con a_4 , $\cdots$, a_{n-2} con a_{n-1} , a_n con ∞ . Habrá $p + 1$ líneas de ramificación y $2p + 2$ puntos de ramificación; ∞ es un punto de ramificación.

7.08. Ejemplo 6: $w^3 = (z - a)(z - b)$, ($a \neq b$). Sean

$$z - a = r_1 \operatorname{cis} \theta_1, \quad z - b = r_2 \operatorname{cis} \theta_2.$$

Entonces

$$w_1 = \sqrt[3]{r_1 r_2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{3} \right),$$

$$w_2 = \sqrt[3]{r_1 r_2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{3} + \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$w_3 = \sqrt[3]{r_1 r_2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{3} + \frac{4\pi}{3} \right).$$

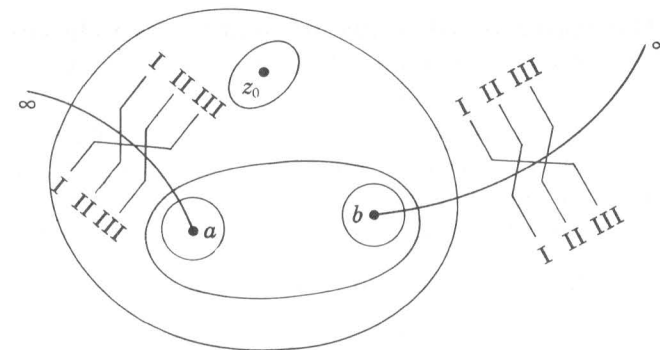


FIGURA 7.5

Primero que nada, notamos que la correspondencia entre z y w es 2-3. En consecuencia, reemplazamos el plano z por una superficie z de tres hojas. Después, ya que $w_1 = w_2 = w_3$ si y sólo si $z = a, b, \infty$, vemos que los puntos a, b, ∞ son puntos de unión de las tres hojas.

(a) Hagamos que z describa un contorno cerrado pequeño alrededor de $z_0 \neq a, b, \infty$. Entonces

$$\theta_1 \rightarrow \theta_1 \quad \text{y} \quad \theta_2 \rightarrow \theta_2.$$

En consecuencia, los valores de w vuelven a la hoja original para dichas curvas.

(b) Hagamos que z describa un contorno cerrado en contra de las manecillas del reloj alrededor de $z_0 = a$, pero no alrededor de b, ∞ . Entonces

$$\theta_1 \rightarrow \theta_1 + 2\pi \quad \text{y} \quad \theta_2 \rightarrow \theta_2.$$

En consecuencia, los valores de w para los puntos de dicho contorno cambian de w_i a w_{i+1} (modo 3). Por lo tanto, a es un punto de ramificación.

(c) De una manera semejante para b , que es un punto de ramificación.

(d) Hagamos que z describa un contorno cerrado en contra de las manecillas del reloj alrededor de a y b . Entonces

$$\theta_1 \rightarrow \theta_1 + 2\pi \quad \text{y} \quad \theta_2 \rightarrow \theta_2 + 2\pi.$$

En consecuencia, los valores de w para los puntos de dicho contorno cambian de w_i a w_{i+2} (modo 3).

(e) Hagamos que z describa un contorno cerrado alrededor de ∞ . Esto es esencialmente (d). En consecuencia ∞ es un punto de ramificación.

Claramente, líneas de ramificación que conecten a y b con ∞ , como se indica en la Fig. 7.5, satisfacen los requerimientos. Ya que a , b , ∞ son puntos de ramificación que unen las tres hojas, se dice que son puntos de ramificación de orden 2.

7.09. Ejemplo 7: $w^2 = (z - a)/(z - b)$, ($a \neq b$). Sean

$$z - a = r_1 \operatorname{cis} \theta_1, \quad z - b = r_2 \operatorname{cis} \theta_2.$$

Entonces

$$w_1 = \sqrt{r_1/r_2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right),$$

$$w_2 = \sqrt{r_1/r_2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} + \pi \right).$$

Primero que nada, notamos que la correspondencia entre z y w es 1-2. En consecuencia, debemos reemplazar el plano z por una superficie z de dos hojas. Después, ya que $w_1 = w_2$ si y sólo si $z = a$, b , vemos que a y b son puntos de unión de estas hojas.

(a) Hagamos que z describa un contorno cerrado alrededor de $z_0 \neq a$, b pero no alrededor de a o b . Entonces

$$\theta_1 \rightarrow \theta_1 \quad \text{y} \quad \theta_2 \rightarrow \theta_2.$$

En consecuencia, los valores de w regresan a la misma hoja para dichos contornos.

(b) Hagamos que z describa un contorno cerrado en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de a pero no alrededor de b . Entonces

$$\theta_1 \rightarrow \theta_1 + 2\pi \quad \text{y} \quad \theta_2 \rightarrow \theta_2.$$

En consecuencia, los valores de w para puntos de dicho contorno cambian de hojas. Así a es un punto de ramificación.

(c) De una manera semejante para b , el cual también es un punto de ramificación.

(d) Hagamos que z describa un contorno cerrado alrededor de a y b . Entonces

$$\theta_1 \rightarrow \theta_1 + 2\pi, \quad \theta_2 \rightarrow \theta_2 + 2\pi.$$

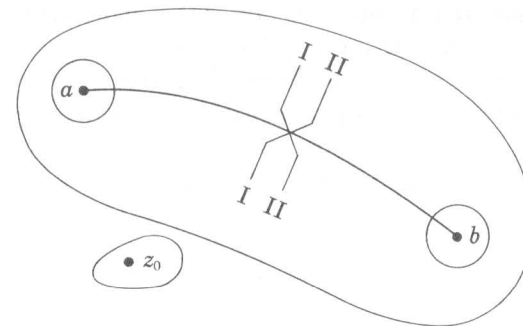


FIGURA 7.6

En consecuencia, los valores de w para dichos contornos regresan a la hoja original.

Claramente, una línea de ramificación conectando a con b , como se indica en la Fig. 7.6, satisface los requisitos.

7.10. Ejemplo 8: $w^4 - 2w^2(2z - a - b) + (a - b)^2 = 0$, ($a \neq b$). Resolviendo la ecuación dada por medio de la fórmula cuadrática, tenemos

$$\begin{aligned} w^2 &= 2z - a - b \pm \sqrt{(2z - a - b)^2 - (a - b)^2} \\ &= (z - a) + (z - b) \pm 2\sqrt{(z - a)(z - b)} \\ &= (\sqrt{z - a} \pm \sqrt{z - b})^2. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{z - a} + \sqrt{z - b}, \\ w_2 &= -\sqrt{z - a} - \sqrt{z - b}, \\ w_3 &= \sqrt{z - a} - \sqrt{z - b}, \\ w_4 &= -\sqrt{z - a} + \sqrt{z - b}. \end{aligned}$$

Sean

$$z - a = r_1 \operatorname{cis} \theta_1 \quad \text{y} \quad z - b = r_2 \operatorname{cis} \theta_2.$$

Entonces

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{r_1} \operatorname{cis} \theta_1/2 + \sqrt{r_2} \operatorname{cis} \theta_2/2, \\ w_2 &= -\sqrt{r_1} \operatorname{cis} \theta_1/2 - \sqrt{r_2} \operatorname{cis} \theta_2/2, \\ w_3 &= \sqrt{r_1} \operatorname{cis} \theta_1/2 - \sqrt{r_2} \operatorname{cis} \theta_2/2, \\ w_4 &= -\sqrt{r_1} \operatorname{cis} \theta_1/2 + \sqrt{r_2} \operatorname{cis} \theta_2/2. \end{aligned} \tag{I}$$

Primero que nada, notamos que la correspondencia entre z y w es 1-4. En consecuencia, debemos reemplazar el plano z por una superficie z de cuatro hojas. Después vemos que valores iguales para w están dados por $z = a, b, \infty$, como se indica en la tabla siguiente. Así vemos que las parejas de hojas I y IV, y II y III están unidas en a , I y III, y II y IV en b , y I y II, y III y IV en ∞ .

z	a	b	∞
w_1	$\sqrt{a-b}$	$\sqrt{b-a}$	∞
w_2	$-\sqrt{a-b}$	$-\sqrt{b-a}$	∞
w_3	$-\sqrt{a-b}$	$\sqrt{b-a}$	0
w_4	$\sqrt{a-b}$	$-\sqrt{b-a}$	0

(a) Hagamos que z describa un pequeño contorno cerrado alrededor de $z_0 \neq a, b, \infty$. Entonces

$$\theta_1 \rightarrow \theta_1 \quad \text{y} \quad \theta_2 \rightarrow \theta_2.$$

Así los valores de w_1, w_2, w_3, w_4 , como se dan en (1) permanecen iguales, y no hay permutación de hojas.

(b) Hagamos que z describa un pequeño contorno cerrado en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de a . Entonces.

$$\theta_1 \rightarrow \theta_1 + 2\pi \quad \text{y} \quad \theta_2 \rightarrow \theta_2.$$

En consecuencia, tenemos la siguiente permutación de hojas:

$$\begin{aligned} w_1 &\rightarrow w_4, \\ w_2 &\rightarrow w_3, \\ w_3 &\rightarrow w_2, \\ w_4 &\rightarrow w_1. \end{aligned}$$

Así, hay dos puntos de ramificación en a , cada uno del orden 1.

(c) Tratando a b de una manera semejante, obtenemos

$$\begin{aligned} w_1 &\rightarrow w_3, \\ w_2 &\rightarrow w_4, \\ w_3 &\rightarrow w_1, \\ w_4 &\rightarrow w_2. \end{aligned}$$

Así, hay dos puntos de ramificación en b , cada uno de orden 1.

(d) Hagamos que z describa un contorno cerrado en sen-

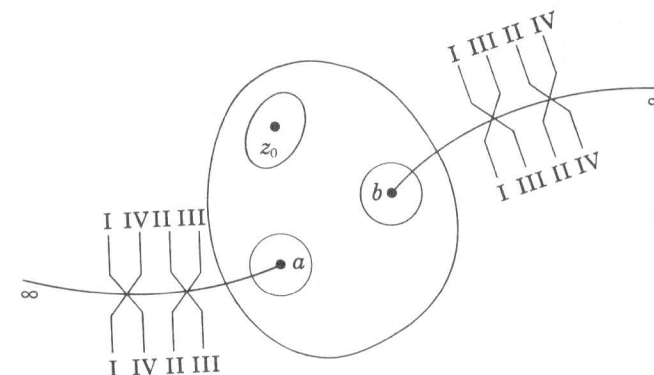


FIGURA 7.7

tido contrario a las manecillas del reloj alrededor de a y b . Entonces

$$\theta_1 \rightarrow \theta_1 + 2\pi \quad \text{y} \quad \theta_2 \rightarrow \theta_2 + 2\pi.$$

En consecuencia, tenemos la siguiente permutación de hojas:

$$\begin{aligned} w_1 &\rightarrow w_2, \\ w_2 &\rightarrow w_1, \\ w_3 &\rightarrow w_4, \\ w_4 &\rightarrow w_3. \end{aligned}$$

Así, hay dos puntos de ramificación en ∞ , cada uno de orden 1.

Las líneas de ramificación uniendo a y b con ∞ , como se indica en la Fig. 7.7, satisfacen todos los requisitos anteriores.

7.11. Ejemplo 9: $w = \sqrt[3]{\frac{z-a}{(z-c)^2}} + \sqrt{z-b}, (a \neq b \neq c \neq a).$

Necesitaremos una superficie z de seis hojas. Sean

$$\begin{aligned} z-a &= r_1 \operatorname{cis} \theta_1, \\ z-b &= r_2 \operatorname{cis} \theta_2, \\ z-c &= r_3 \operatorname{cis} \theta_3. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[3]{\frac{z-a}{(z-c)^2}} + \sqrt{z-b} \\ &= \sqrt[3]{r_1/r_3^2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1 - 2\theta_3}{3} \right) + \sqrt{r_2} \operatorname{cis} \frac{\theta_2}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2 &= \sqrt[3]{\frac{z-a}{(z-c)^2}} \omega + \sqrt{z-b} \\
&= \sqrt[3]{r_1/r_3^2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1 - 2\theta_3}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) + \sqrt{r_2} \operatorname{cis} \frac{\theta_2}{2}, \\
w_3 &= \sqrt[3]{\frac{z-a}{(z-c)^2}} \omega^2 + \sqrt{z-b} \\
&= \sqrt[3]{r_1/r_3^2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1 - 2\theta_3}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) + \sqrt{r_2} \operatorname{cis} \frac{\theta_2}{2}, \\
w_4 &= \sqrt[3]{\frac{z-a}{(z-c)^2}} - \sqrt{z-b} \\
&= \sqrt[3]{r_1/r_3^2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1 - 2\theta_3}{3} \right) + \sqrt{r_2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_2}{2} + \pi \right), \\
w_5 &= \sqrt[3]{\frac{z-a}{(z-c)^2}} \omega - \sqrt{z-b} \\
&= \sqrt[3]{r_1/r_3^2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1 - 2\theta_3}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) + \sqrt{r_2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_2}{2} + \pi \right), \\
w_6 &= \sqrt[3]{\frac{z-a}{(z-c)^2}} \omega^2 - \sqrt{z-b} \\
&= \sqrt[3]{r_1/r_3^2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1 - 2\theta_3}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) + \sqrt{r_2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_2}{2} + \pi \right).
\end{aligned}$$

Vemos después que ocurren raíces iguales w en $z = a, b, c, \infty$, como se indica en la siguiente tabla. Así, como se indica en la tabla, las hojas I, II, III y las hojas IV, V, VI están unidas en a ; las hojas I y IV, II y V, III y VI en b ; todas en c y todas en ∞ .

z	a	b	c	∞
w_1	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
w_2	$\times$	0	$\times$	$\times$
w_3	$\times$	$\wedge$	$\times$	$\times$
w_4	0	$\times$	$\times$	$\times$
w_5	0	0	$\times$	$\times$
w_6	0	$\wedge$	$\times$	$\times$

Ahora, como se indica en la tabla siguiente, hagamos que z describa un contorno cerrado en sentido contrario a las manecillas del reloj, solamente alrededor de los puntos dados. Vemos que a es un punto de ramificación doble de orden 2; b es un punto de ramificación triple de orden 1; c es un punto de ramificación de orden 5; e ∞ es un punto de ramificación de orden 5. La Fig. 7.8 da una superficie de Riemann satisfactoria para la función dada.

1. $z_0 \neq a, b, c, \infty$	2. a	3. b	4. c
$w_1 \rightarrow w_1$	$w_1 \rightarrow w_2$	$w_1 \rightarrow w_4$	$w_1 \rightarrow w_2$
$w_2 \rightarrow w_2$	$w_2 \rightarrow w_3$	$w_2 \rightarrow w_5$	$w_2 \rightarrow w_3$
$w_3 \rightarrow w_3$	$w_3 \rightarrow w_1$	$w_3 \rightarrow w_6$	$w_3 \rightarrow w_1$
$w_4 \rightarrow w_4$	$w_4 \rightarrow w_5$	$w_4 \rightarrow w_1$	$w_4 \rightarrow w_5$
$w_5 \rightarrow w_5$	$w_5 \rightarrow w_6$	$w_5 \rightarrow w_2$	$w_5 \rightarrow w_6$
$w_6 \rightarrow w_6$	$w_6 \rightarrow w_4$	$w_6 \rightarrow w_3$	$w_6 \rightarrow w_4$

5. b y c	6. c y a	7. a y b	8. a, b, c
$w_1 \rightarrow w_5$	$w_1 \rightarrow w_3$	$w_1 \rightarrow w_5$	$w_1 \rightarrow w_6$
$w_2 \rightarrow w_6$	$w_2 \rightarrow w_1$	$w_2 \rightarrow w_6$	$w_2 \rightarrow w_4$
$w_3 \rightarrow w_4$	$w_3 \rightarrow w_2$	$w_3 \rightarrow w_4$	$w_3 \rightarrow w_5$
$w_4 \rightarrow w_2$	$w_4 \rightarrow w_6$	$w_4 \rightarrow w_2$	$w_4 \rightarrow w_3$
$w_5 \rightarrow w_3$	$w_5 \rightarrow w_4$	$w_5 \rightarrow w_3$	$w_5 \rightarrow w_1$
$w_6 \rightarrow w_1$	$w_6 \rightarrow w_5$	$w_6 \rightarrow w_1$	$w_6 \rightarrow w_2$

7.12 Ejemplo 10: $w^6 = (z-a)^2(z-b)^3$, ($a \neq b$). Necesitaremos una superficie z de seis hojas. Sean

$$z-a = r_1 \operatorname{cis} \theta_1 \quad \text{y} \quad z-b = r_2 \operatorname{cis} \theta_2.$$

Entonces

$$w_1 = \sqrt[3]{z-a} \sqrt{z-b} = \sqrt[3]{r_1} \sqrt{r_2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1}{3} + \frac{\theta_2}{2} \right),$$

$$w_2 = \sqrt[3]{z-a} \sqrt{z-b} \omega = \sqrt[3]{r_1} \sqrt{r_2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\theta_2}{2} \right),$$

$$w_3 = \sqrt[3]{z-a} \sqrt{z-b} \omega^2 = \sqrt[3]{r_1} \sqrt{r_2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1}{3} + \frac{4\pi}{3} + \frac{\theta_2}{2} \right),$$

$$w_4 = -\sqrt[3]{z-a} \sqrt{z-b} = \sqrt[3]{r_1} \sqrt{r_2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1}{3} + \frac{\theta_2}{2} + \pi \right),$$

$$w_5 = -\sqrt[3]{z-a} \sqrt{z-b} \omega = \sqrt[3]{r_1} \sqrt{r_2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\theta_2}{2} + \pi \right),$$

$$w_6 = -\sqrt[3]{z-a} \sqrt{z-b} \omega^2 = \sqrt[3]{r_1} \sqrt{r_2} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_1}{3} + \frac{4\pi}{3} + \frac{\theta_2}{2} + \pi \right).$$

Vemos después que para a , b , ∞ , todas las raíces w son iguales. En consecuencia, las seis hojas están unidas entre sí en estos puntos.

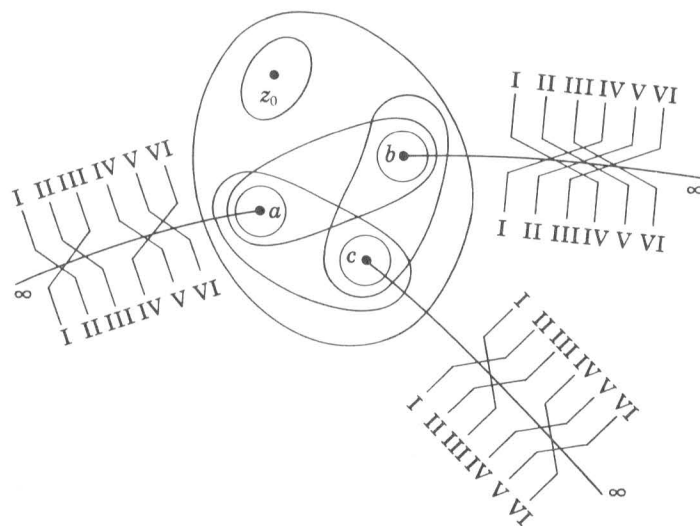


FIGURA 7.8

Ahora, hagamos que z describa un contorno cerrado en sentido contrario al de las manecillas del reloj, solamente alrededor de los puntos dados. Vemos, de la tabla siguiente, que a , b , ∞ , son puntos de ramificación de orden 5. La Fig. 7.9 da una superficie de Riemann satisfactoria para la función dada.

1. $z_0 \neq a, b, \infty$	2. a	3. b	4. a y b
$w_1 \rightarrow w_1$	$w_1 \rightarrow w_2$	$w_1 \rightarrow w_4$	$w_1 \rightarrow w_5$
$w_2 \rightarrow w_2$	$w_2 \rightarrow w_3$	$w_2 \rightarrow w_5$	$w_2 \rightarrow w_6$
$w_3 \rightarrow w_3$	$w_3 \rightarrow w_1$	$w_3 \rightarrow w_6$	$w_3 \rightarrow w_4$
$w_4 \rightarrow w_4$	$w_4 \rightarrow w_5$	$w_4 \rightarrow w_1$	$w_4 \rightarrow w_2$
$w_5 \rightarrow w_5$	$w_5 \rightarrow w_6$	$w_5 \rightarrow w_2$	$w_5 \rightarrow w_3$
$w_6 \rightarrow w_6$	$w_6 \rightarrow w_4$	$w_6 \rightarrow w_3$	$w_6 \rightarrow w_1$

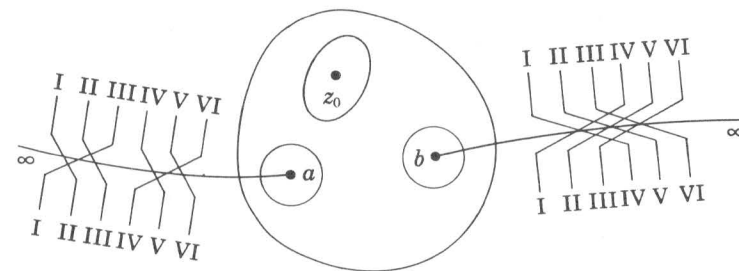


FIGURA 7.9



CAPITULO 8

Funciones de Variable Real

En este capítulo consideramos brevemente ciertas partes de la teoría de funciones de variable real que serán de utilidad más tarde.

FUNCIONES

8.01. Representación geométrica de números reales. Tomemos una línea recta y en ella un punto fijo O como origen; también tomemos un segmento unitario OI para medir longitudes o distancias. Representamos cualquier número real positivo, a , por el punto A , que está a la distancia a en la dirección OI , de O ; y $-a$ por el correspondiente A' en la otra dirección desde O . (Véase la Fig. 8.1.)



FIGURA 8.1

8.02. Definiciones y notación. Siguiendo nuestras definiciones y notación para intervalos numéricos.

$(a, b),$	$a < x < b,$	$\begin{array}{c} a \\ \circ \end{array} \text{-----} \begin{array}{c} b \\ \circ \end{array}$	} abiertos	} finitos
$[a, b),$	$a \leq x < b,$	$\begin{array}{c} a \\ \text{---} \end{array} \text{-----} \begin{array}{c} b \\ \circ \end{array}$		
$(a, b],$	$a < x \leq b,$	$\begin{array}{c} a \\ \circ \end{array} \text{-----} \begin{array}{c} b \\ \text{---} \end{array}$		
$[a, b],$	$a \leq x \leq b,$	$\begin{array}{c} a \\ \text{---} \end{array} \text{-----} \begin{array}{c} b \\ \text{---} \end{array}$		
$(a, +\infty),$	toda $x > a,$	$\begin{array}{c} a \\ \circ \end{array} \text{-----} \rightarrow$	} abiertos	} infinitos
$[a, +\infty),$	toda $x \geq a,$	$\begin{array}{c} a \\ \text{---} \end{array} \text{-----} \rightarrow$		
$(-\infty, b),$	toda $x < b,$	$\leftarrow \text{-----} \begin{array}{c} b \\ \circ \end{array}$		
$(-\infty, b],$	toda $x \leq b,$	$\leftarrow \text{-----} \begin{array}{c} b \\ \text{---} \end{array}$		
$(-\infty, +\infty),$	toda $x,$	$\longleftrightarrow$		

8.03. Definiciones. Una *constante*, como c , es un símbolo para un solo número. Una *variable*, como x , es un símbolo para cualquier número de un conjunto de ellos. El conjunto de valores que puede tomar una variable es llamado el *dominio* de la variable. Si el dominio de una variable es un intervalo numérico, entonces es una *variable real continua*.

8.04. Definiciones. Sea x una variable con dominio D . Demos una ley que asigne para cada valor de x en D uno o más valores de y . Decimos que y es una *función de x en D* , y escribimos

$$y = f(x), \text{ o } y = \varphi(x), \text{ etc.}$$

Si y tiene sólo un valor asignado para cada valor de x en D , entonces decimos que y es una *función de simple valuación*; de otra manera y es una *función de múltiple valuación*. x es llamada la *variable independiente* o el *argumento*, y y es llamada la *variable dependiente*. Debemos notar, no obstante, que y puede ser una constante. D es llamado el *dominio de definición* de la función, y los valores que toma y se conocen como los *valores* de la función. Si los valores de una función son reales, entonces decimos que es una *función real*.

La definición anterior de función se atribuye a *Dirichlet*.

En este capítulo nos limitaremos a las funciones reales de simple valuación, generalmente de una variable real continua.

8.05. Gráfica de una función real de simple valuación. Sea $y = f(x)$ la función real dada cuyo dominio de definición es D . La representación gráfica de D es el conjunto de los puntos en el eje x . Sea a el valor de x al que corresponde el valor b de y . El punto P en la Fig. 8.2 cuyas coordenadas rectangulares

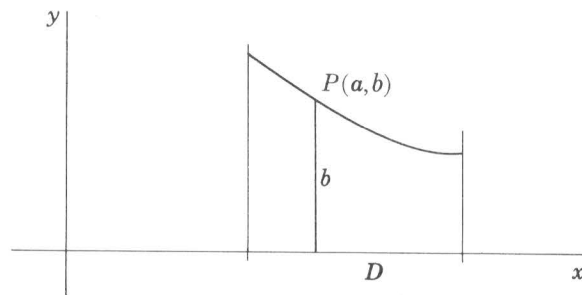


FIGURA 8.2

son (a, b) , representa la función para $x = a$. Como x se mueve a lo largo de D , P se mueve a lo largo de un conjunto de puntos que llamamos la *gráfica* de $f(x)$.

Ejemplos

(1) $y = 1/x$. Definida en todas partes excepto en $x = 0$.

(2) $y = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$. No definida en $x = a$.

(3) $y = \frac{\sin x}{x}$. No definida en $x = 0$.

(4) $y = a - x$. $-\infty < x < \infty$.

(5) $y = +\sqrt{x}$. $0 \leq x < \infty$.

(6) $\log \sin x$. $2k\pi < x < (2k + 1)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

(7) $f(x) = 1, x \neq 0$, y $f(x) = 0, x = 0$ (Fig. 8.3).

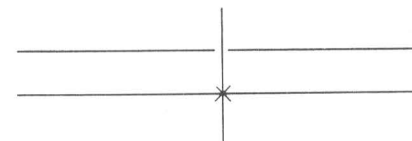


FIGURA 8.3

(8) $f(x) = [x]$ (Fig. 8.4).

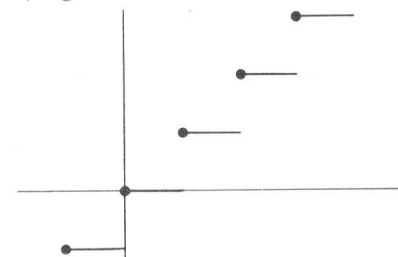


FIGURA 8.4

(9) $f(x) = x - [x]$ (Fig. 8.5).

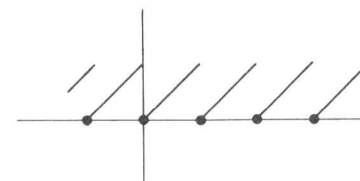


FIGURA 8.5

(c) Sea $f(x)$ una función de simple valuación definida en la vecindad de la izquierda de $x = a$. Si, dada una $\varepsilon > 0$, tan pequeña como se quiera, existe una $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - b| < \varepsilon \text{ cuando } a - \delta < x < a,$$

entonces decimos que b es el *límite izquierdo* de $f(x)$ en $x = a$, y escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b,$$

o

$$f(x) \rightarrow b \text{ cuando } x \rightarrow a-.$$

(d) Sea $f(x)$ una función de simple valuación definida en la vecindad de $\pm \infty$. Si, dada una $\varepsilon > 0$, tan pequeña como se quiera, existe una g tal que

$$|f(x) - b| < \varepsilon \text{ cuando } x \geq g,$$

entonces decimos que b es el *límite* de $f(x)$ en $x = \pm \infty$, y escribimos

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = b.$$

(e) Sea $f(x)$ una función de simple valuación definida en la vecindad de $x = a$, excepto tal vez en $x = a$. Si, dada $g > 0$, tan grande como se quiera, existe una $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)| > g \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta,$$

entonces decimos que $f(x)$ *se vuelve infinita* en $x = a$, y escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

(f) Sea $f(x)$ una función de simple valuación definida en la vecindad de $x = \pm \infty$. Si, dada una $g > 0$, tan grande como se quiera, existe una $h > 0$ tal que

$$|f(x)| > g \text{ cuando } x \geq h,$$

entonces decimos que $f(x)$ *se vuelve infinita* en $x = \pm \infty$, y escribimos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty.$$

8.08. Notas. (a) Vemos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ puede existir aun cuando $f(x)$ no está definida en $x = a$, como en

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a.$$

(b) *Contenido geométrico de (a) del Art. 8.07:* Supongamos que $y = f(x)$ está graficada (Fig. 8.8). Si para cada dos líneas $y = b + \varepsilon$ y $y = b - \varepsilon$, se pueden encontrar otras dos, $x = a + \delta$ y $x = a - \delta$, tales que la gráfica no contiene ningún punto entre las dos líneas verticales que no esté también entre las dos horizontales, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

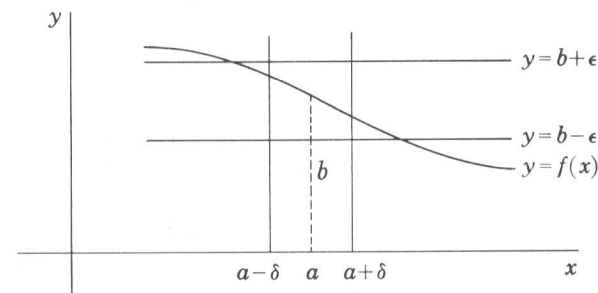


FIGURA 8.8

8.09. Teorema. Una función de simple valuación $f(x)$ tiene cuando más un límite en $x = a$.

Demostración: Supongamos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_2$,

($b_1 \neq b_2$). Escojamos $\varepsilon < \frac{1}{2}|b_2 - b_1|$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} |f(x) - b_1| &< \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta_1, \\ |b_2 - f(x)| &< \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta_2. \end{aligned}$$

Podemos sustituir δ_1 y δ_2 por su mínimo δ . Entonces tenemos

$$|b_2 - b_1| \leq |f(x) - b_1| + |b_2 - f(x)| < 2\varepsilon$$

para $0 < |x - a| < \delta$. Pero esto contradice nuestra elección de ε . En consecuencia el teorema.

8.10. Teorema. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, entonces $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b$.

8.11. Teorema. Si $f(x)$ y $\varphi(x)$ son funciones de simple valuación de x , y si cada una está definida en alguna vecindad de a , excepto tal vez en a , y si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B,$$

a, A, B finitos, tenemos

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + \varphi(x)\}$ existe y es igual a $A + B$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)\varphi(x)\}$ existe y es igual a AB ,
- (c) y, si $B \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)/\varphi(x)\}$ existe y es igual a A/B .

Demostración: Como $f(x)$ y $\varphi(x)$ son funciones de simple valuación, también lo son $f(x) + \varphi(x)$, $f(x)\varphi(x)$ y $f(x)/\varphi(x)$. También, como $f(x)$ y $\varphi(x)$ están definidas cada una en una vecindad de $x = a$, excepto tal vez en $x = a$, también $f(x) + \varphi(x)$ y $f(x)\varphi(x)$ están definidas en dicha vecindad, que es la vecindad común de definición de $f(x)$ y $\varphi(x)$. También, en el caso (c), $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B \neq 0$, de lo cual $\varphi(x)$ no puede tener un cero en todas las vecindades de a , y se sigue que $f(x)/\varphi(x)$ está definida en una vecindad de $x = a$, excepto tal vez en $x = a$.

(1) Sea ϵ un número positivo arbitrario, y tomemos $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{1}{2}\epsilon$. Entonces, por hipótesis, hay números positivos δ_1 y δ_2 tales que

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &< \epsilon_1 \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta_1, \\ |\varphi(x) - B| &< \epsilon_2 \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta_2. \end{aligned}$$

En consecuencia, ciertamente

$$|f(x) + \varphi(x) - (A + B)| \leq |f(x) - A| + |\varphi(x) - B| < \epsilon$$

cuando $0 < |x - a| < \delta$, donde $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. De ahí la parte (a) del teorema.

(2) Sea ϵ un número positivo arbitrario, y tomemos $\epsilon_1 = \epsilon_2$ igual a la raíz positiva de la ecuación cuadrática

$$y^2 + y(|A| + |B|) - \epsilon = 0. \quad (1)$$

Entonces, por hipótesis, hay números positivos δ_1 y δ_2 tales que

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &< \epsilon_1 \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta_1, \\ |\varphi(x) - B| &< \epsilon_2 \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta_2. \end{aligned}$$

En consecuencia ciertamente, para

$$0 < |x - a| < \delta, \quad \delta = \min(\delta_1, \delta_2),$$

tenemos

$$\begin{aligned} |f(x)\varphi(x) - AB| &= |f(x)\{\varphi(x) - B\} + B\{f(x) - A\}| \\ &\leq |f(x)||\varphi(x) - B| + |B||f(x) - A| \\ &< \{|A| + \epsilon_1\}\epsilon_2 + |B|\epsilon_1 \\ &= \epsilon_1^2 + \epsilon_1(|A| + |B|) \\ &= \epsilon \quad \text{por (1).} \end{aligned}$$

De ahí la parte (b) del teorema.

(3) Sea ϵ un número positivo arbitrario, y tomemos

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\epsilon|B|^2}{|A| + |B| + \epsilon|B|}.$$

Despejando ϵ , esto nos da

$$\epsilon = \frac{\epsilon_1(|A| + |B|)}{|B|(|B| - \epsilon_1)}. \quad (2)$$

Ahora, por hipótesis, hay números positivos δ_1 y δ_2 tales que

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &< \epsilon_1 \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta_1, \\ |\varphi(x) - B| &< \epsilon_2 \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta_2. \end{aligned}$$

En consecuencia ciertamente, para

$$0 < |x - a| < \delta, \quad (3)$$

donde $\delta > \min(\delta_1, \delta_2)$ y también es suficientemente pequeño para que todos los puntos x de (2) caigan en la vecindad de definición de $f(x)/\varphi(x)$, tenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{A}{B} \right| &= \left| \frac{f(x)B - \varphi(x)A}{B\varphi(x)} \right| \\ &= \left| \frac{f(x)\{B - \varphi(x)\} - \varphi(x)\{A - f(x)\}}{B\varphi(x)} \right| \\ &\leq \frac{|f(x)| |B - \varphi(x)|}{|B|} + \frac{|A - f(x)|}{|B|}. \quad (4) \end{aligned}$$

Ahora tenemos $\epsilon_1 > |f(x) - A| \geq |f(x)| - |A|$. Por lo tanto

$$|A| + \epsilon_1 > |f(x)|. \quad (5)$$

También, tenemos $\epsilon_2 > |\varphi(x) - B| = |B - \varphi(x)| \geq |B| - |\varphi(x)|$. Por lo tanto

$$|B| - \epsilon_2 < |\varphi(x)|.$$

Pero también, por (2), vemos que $|B| - \epsilon_2 > 0$, de lo cual

$$0 < |B| - \epsilon_2 < |\varphi(x)|. \quad (6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (4), tenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{A}{B} \right| &< \frac{|A| + \epsilon_1}{|B| - \epsilon_1} \cdot \frac{\epsilon_2}{|B|} + \frac{\epsilon_1}{|B|} \\ &= \frac{\epsilon_1(|A| + |B|)}{|B|(|B| - \epsilon_1)} = \epsilon. \end{aligned}$$

De ahí la parte (c) del teorema.

CONTINUIDAD

8.12. Definición. Sea $f(x)$ una función de simple valuación definida en una vecindad de $x = a$. Si

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

entonces $f(x)$ es continua en $x = a$.

8.13. Nota. Vemos así, de la definición en el Art. 8.12, que hay tres modos en los cuales $f(x)$ puede ser discontinua en $x = a$:

A. $f(x)$ no está definida en una vecindad de $x = a$.

B. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe pero $\neq f(a)$.

C. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe.

Ejemplos

A. (1) $f(x) = \sin x/x$ no está definida en $x = 0$ y en consecuencia es discontinua ahí.

(2) $f(x) = x \sin 1/x$ no está definida en $x = 0$ y en consecuencia es discontinua ahí.

B. (3) $\begin{cases} f(x) = \sin x/x, & x \neq 0 \\ f(x) = 0, & x = 0 \end{cases}$
Aquí $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq 0$.

(4) $\begin{cases} f(x) = 1, & x \neq 0 \\ f(x) = 0, & x = 0 \end{cases}$
Aquí $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq 0$.

C. Tipo I: $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ existen pero son diferentes.

(5) $f(x) = [x]$. Sea a cualquier entero. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = a - 1.$$

$$(6) \begin{cases} f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ f(x) = 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Aquí } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1.$$

Tipo II: $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm \infty$ o $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \pm \infty$.

(7) $f(x) = 1/x$. Aquí $\lim_{x \rightarrow 0 \pm} f(x) = \pm \infty$.

(8) $f(x) = e^{1/x}$. Aquí $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$.

(9) $f(x) = \tan x$. Aquí $\lim_{x \rightarrow \pi/2 \pm} f(x) = \infty$.

Tipo III: $\lim_{x \rightarrow a \pm} f(x)$ no existe y tampoco se vuelve infinito.

$$(10) \begin{cases} f(x) = \sin 1/x, & x \neq 0 \\ f(x) = 0, & x = 0 \end{cases}$$

Aquí $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe.

$$(11) \begin{cases} f(x) = x \sin 1/x, & x \neq 0 \\ f(x) = 0, & x = 0 \end{cases}$$

Aquí $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, y $f(x)$ es continua en $x = 0$.

8.14. Definiciones. $f(x)$ tiene una *discontinuidad amovible* en $x = a$ si se vuelve continua en $x = a$ después de haber sido definida o redefinida en $x = a$. Las discontinuidades amovibles son de clase A o B.

Una discontinuidad de clase C, tipo I, es llamada *discontinuidad de salto*.

Una discontinuidad de clase C, tipo II, es llamada *discontinuidad infinita*.

Una discontinuidad de clase C, tipo III, es llamada *discontinuidad oscilatoria*.

8.15. Definiciones. Se dice que una discontinuidad en $x = a$ de $f(x)$ es *aislada* si existe una vecindad de a en la cual $x = a$ da la única discontinuidad de $f(x)$. De otro modo se dice que la discontinuidad es *no-aislada*.

Ejemplos

$$(1) \begin{cases} f(x) = 1/\sin \frac{1}{x}, & x \neq \frac{1}{n\pi}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ f(x) = 0, & x = \frac{1}{n\pi}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Esta función es discontinua en $x = 1/n\pi$ porque

$$\lim_{x \rightarrow 1/n\pi} \frac{1}{\sin \frac{1}{x}} = \infty.$$

Pero en una vecindad suficientemente pequeña de $x = 1/n\pi$ la función es continua para cualquier otro valor. En consecuencia $x = 1/n\pi$ es una discontinuidad aislada.

$$(2) \begin{cases} f(x) = 1, & x \text{ racional} \\ f(x) = 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

Esta función es discontinua en todas partes.

8.16. Definición. $f(x)$ es continua en (a, b) si $f(x)$ es continua en todos los puntos de (a, b) .

8.17. Definición. $f(x)$ es continua a la derecha de a si $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$, y $f(x)$ es continua a la izquierda de b si $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b)$.

Ejemplo: $f(x) = [x]$ es continua a la derecha de toda x .

8.18. Definición. $f(x)$ es continua en $[a, b]$ si $f(x)$ es continua en (a, b) , continua a la derecha en a , y continua a la izquierda en b .

Nota: Si $f(x)$ es continua en (a, b) , entonces no es necesariamente continua en $[a, b]$. Por ejemplo, $f(x) = 1/x$ en $[0, 1]$.

8.19. Teorema. Si $u(x)$ y $v(x)$ son continuas en el intervalo R , entonces

- (a) $u + v$ es continua en R ,
- (b) uv es continua en R ,
- (c) u/v es continua en R si $v \neq 0$ en R .

Demostración: Por el Art. 8.11.

8.20. Teorema. Una función racional en x , reducida a su término más bajo, es continua en todas partes excepto para los valores de x para los cuales su denominador se desvanece.

8.21. Definiciones. Si existe una G tal que $f(x) < G$ en toda el intervalo R , entonces llamamos a G una *frontera superior* de $f(x)$ en R . Si existe una g tal que $f(x) > g$ en todo R , entonces llamamos a g una *frontera inferior* de $f(x)$ en R . Si $f(x)$ tiene fronteras superior e inferior en R , entonces se dice que $f(x)$ está *circunscrita* en R .

Si G es una frontera superior de $f(x)$ en R tal que para cualquier otra frontera superior G' de $f(x)$ en R tenemos $G \leq G'$, entonces G es llamada la *mínima frontera superior* de $f(x)$ en R . Si g es una frontera inferior de $f(x)$ en R tal que para cualquier otra frontera inferior g' de $f(x)$ en R tenemos $g \geq g'$, entonces g es llamada la *máxima frontera inferior* de $f(x)$ en R .

Notas: (1) Una función puede ser finita a través de un intervalo y, sin embargo, no estar circunscrita en ese intervalo. Por ejemplo, $f(x) = 1/x$ en $(0, 1)$.

(2) Puede demostrarse que la existencia de una frontera superior (o inferior) implica la existencia de una mínima frontera superior (o máxima inferior).

8.22. Teorema. Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces $f(x)$ está circunscrita en $[a, b]$.

8.23. Teorema. Si $f(x)$ es continua en $x = a$ y $\varphi(u)$ es continua en $u = f(a)$, entonces $\varphi[f(x)]$ es continua en $x = a$.

8.24. Teorema. Si $f(x)$ es continua en $x = a$ y $f(a) \neq 0$, entonces $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(a)$ dentro de una vecindad suficientemente pequeña de $x = a$.

Demostración: Existe una $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(a)| < |f(a)|, \quad |x - a| < \delta.$$

DERIVADAS

8.25. Definición. Sea $f(x)$ una función de simple valuación definida en una vecindad de $x = a$. Si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe y es igual a A , entonces decimos que $f(x)$ tiene una *derivada* en $x = a$ igual a A . Escribimos

$$f'(x)|_{x=a} = A \quad \text{o} \quad D_x f(x)|_{x=a} = A.$$

8.26. Nota. Vemos entonces, de la definición del Art. 8.25, que hay tres formas en las que una función de simple valuación definida en una vecindad de $x = a$ puede fallar en tener una derivada en $x = a$:

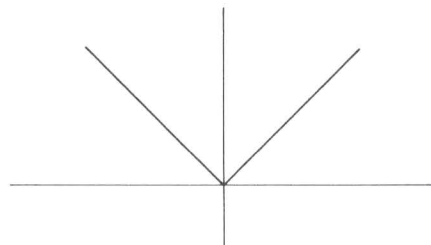
A. $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \neq \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$

B. $\lim_{x \rightarrow a \pm} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$

C. $\lim_{x \rightarrow a \pm} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ no existe y no es infinito.

Ejemplos

A. (1) $f(x) = |x|$



Aquí (Fig. 8.9)

FIGURA 8.9

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

(2) $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ f(x) = 0, & x = 0 \end{cases}$

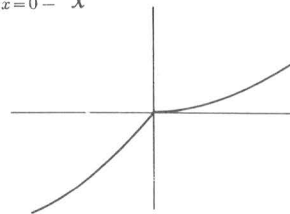


FIGURA 8.10

Aquí (Fig. 8.10)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 1.$$

B. (3) $f(x) = x^{1/3}$
 $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x^{2/3} = \infty.$

(Fig. 8.11)

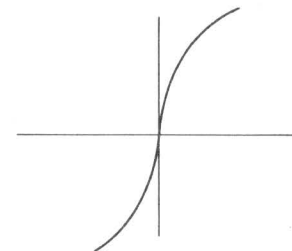


FIGURA 8.11

C. (4) $\begin{cases} f(x) = x \sin 1/x, & x \neq 0 \\ f(x) = 0, & x = 0 \end{cases}$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 1/x \neq A, \infty.$

(Fig. 8.12)

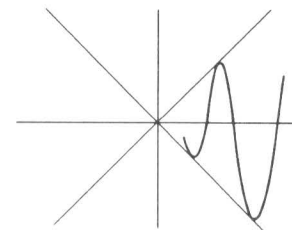


FIGURA 8.12

(5) $\begin{cases} f(x) = 0, & x \text{ racional} \\ f(x) = 1, & x \text{ irracional} \end{cases}$

La derivada no existe en ningún punto.

8.27. Teorema. Si $f'(x)|_{x=a}$ existe, entonces $f(x)$ es continua en $x = a$.

Demostración: Como $f'(x)|_{x=a}$ existe, $f(x)$ está definida en una vecindad de $x = a$. Ahora, por hipótesis,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A.$$

Establecemos

$$g(x) \equiv \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - A.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

Esto es,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - f(a)\} = \lim_{x \rightarrow a} \{g(x)(x - a)\} + \lim_{x \rightarrow a} \{A(x - a)\} = 0.$$

En consecuencia

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Nota: Lo inverso no es verdad. Véanse los Ejs. 1 y 2 del Art. 8.26.

8.28. Definición. Supongamos que $f(x)$ posee una derivada en todos los puntos de (a, b) . La agregada de estas derivadas es llamada la *derivada de $f(x)$* en (a, b) , y se la denota por

$$f'(x), D_x f(x), \text{ o } dy/dx \quad (a < x < b).$$

8.29. Definiciones. Sean P y Q dos puntos sobre la gráfica de $y = f(x)$, definida en el intervalo (a, b) . Entonces llamamos a la línea PQ una *secante* de la gráfica. La posición límite, si existe y es única, de la secante PQ cuando $Q \rightarrow P$ a lo largo de la gráfica, es llamada la *tangente* de la gráfica en P .

8.30. Interpretación geométrica de $f'(x)|_{a \rightarrow x}$. Como se indica en la Fig. 8.13, $RP = f(a)$, $SQ = f(x)$, $TQ = f(x) - f(a)$ y $PT = x - a$.

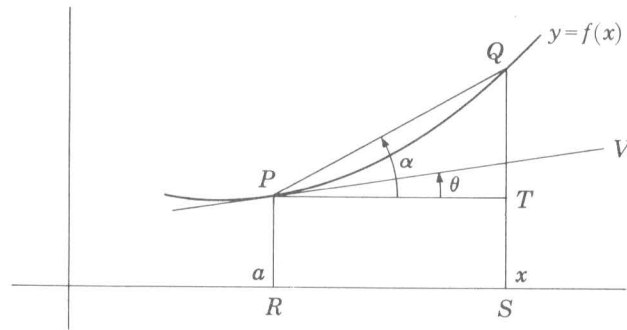


FIGURA 8.13

Por lo tanto

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \tan \alpha,$$

donde α es la inclinación de la secante PQ . Ahora, como $x \rightarrow a$, $Q \rightarrow P$, y como

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow A,$$

se sigue que $\alpha \rightarrow \theta = \tan^{-1} A$. Así, la tangente en P existe y tiene la pendiente A .

8.31. Nota. Suponemos las reglas para la diferenciación de funciones elementales.

8.32. Definición. La derivada de la derivada de una función $f(x)$ es llamada la *segunda derivada* de $f(x)$, etc.

Ejemplos

- (1) $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin 1/x, & x \neq 0 \\ f(x) = 0, & x = 0. \end{cases}$
Aquí (Fig. 8.14)

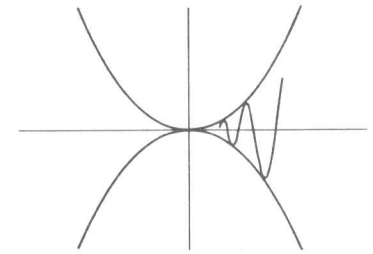


FIGURA 8.14

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin 1/x = 0$$

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin 1/x \text{ no existe.}$$

Hay un caso donde la primera derivada existe en un punto, pero la segunda no.

- (2) $\begin{cases} f(x) = 0, & x < 0 \\ f(x) = x^2, & x \geq 0. \end{cases}$
Aquí (Fig. 8.15)

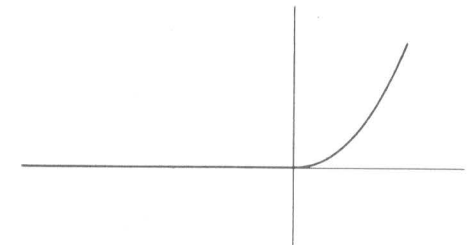


FIGURA 8.15

$$\begin{cases} f'(x) = 0, x < 0 \\ f'(x) = 2x, x > 0 \\ f'(x) = 0, x = 0, \\ f''(x) = 0, x < 0 \\ f''(x) = 2, x > 0 \\ f''(x) \text{ no existe en } x = 0. \end{cases}$$

8.33. Definición. Se dice que $f(x)$ es de la clase C^n en (a, b) si $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\dots$, $f^{(n)}(x)$ son continuas en (a, b) .

8.34. Teorema. $f(x)$ es de clase C^n en (a, b) si $f^{(n)}(x)$ existe y es continua en (a, b) .

Demostración: Por el Art. 8.27.

8.35. Definición. Se dice que $f(x)$ es de clase D^n en (a, b) si existe $f^{(n)}(x)$ en toda (a, b) .

8.36. Una clasificación de funciones. La Fig. 8.16 presenta gráficamente una clasificación de funciones.

TEOREMAS DE VALOR MEDIO PARA UNA VARIABLE

8.37. Teorema. Si $f(x)$ es C^0 en $[a, b]$, entonces entre los diferentes valores de $f(x)$ en $[a, b]$ hay un valor máximo M y un valor mínimo m .

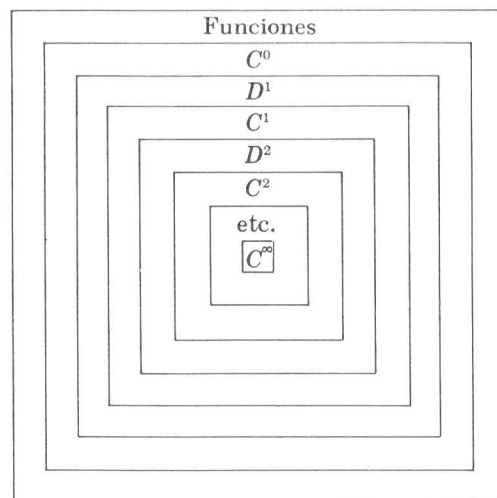


FIGURA 8.16

Demostración: Por los Arts. 8.22 y 8.21, nota (2).

8.38. Teorema de Rolle. Si $f(x)$ es

- (1) C^0 en $[a, b]$,
- (2) D^1 en (a, b) ,
- (3) $f(a) = f(b) = 0$,

entonces existe algún punto ξ en (a, b) tal que $f'(\xi) = 0$.

Demostración: Como $f(x)$ es C^0 en $[a, b]$ toma valores mínimos y máximos m y M en $[a, b]$ (por el Art. 8.37). Tenemos ahora dos casos:

(1) $f(x) \equiv 0$ para toda $[a, b]$. En este caso $f'(x) = 0$ para toda $[a, b]$ y el teorema es cierto.

(2) $f(x) \not\equiv 0$ para toda $[a, b]$. Entonces por lo menos uno de los valores m o M es diferente de 0 y, por lo tanto, corresponde a un valor de x en (a, b) . Sea ξ este valor de x . Entonces $f'(\xi) = 0$. Porque $f'(\xi)$ es finita, por hipótesis de la diferenciabilidad de $f(x)$ en (a, b) ; y sería positiva o negativa, $f(\xi) \neq m$ o M , ya que en (a, b) , cerca de ξ , habría valores de $f(x)$ menores y mayores que $f(\xi)$.

8.39. Teorema de Cauchy del valor medio. Si $f(x)$ es C^0 en $[a, b]$ y D^1 en (a, b) , entonces existe alguna ξ de (a, b) tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Demostración: Consideremos la función

$$\varphi(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x) + f(a).$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\text{ es } C^0 \text{ en } [a, b] && \text{por el Art. 8.19} \\ \varphi(x) &\text{ es } D^1 \text{ en } (a, b) && \text{por el Art. 8.31} \\ \varphi(a) &= \varphi(b) = 0. \end{aligned}$$

Así, $\varphi(x)$ satisface los requisitos del Teorema de Rolle. Por lo tanto, existe ξ en (a, b) tal que $\varphi'(\xi) = 0$, o tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(\xi) = 0.$$

En consecuencia, el teorema.

8.40. Teorema. Si $f(x)$ es C^0 en $[a, a + \Delta x]$ y D^1 en $(a, a + \Delta x)$, entonces existe alguna θ tal que

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a + \theta \Delta x),$$

donde $0 < \theta < 1$.

Demostración: Esta es simplemente una alternativa del Art. 8.39. Hay que notar que Δx no necesita ser positiva.

8.41. Teorema de Lagrange del valor medio. Si $f(x)$ es C^n en $[a, b]$ y D^{n+1} en (a, b) , entonces existe un ξ en (a, b) tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + f''(a) \frac{(b - a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(b - a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi) \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

Demostración: Definamos Q tal que

$$f(b) - f(a) - f'(a)(b - a) - f''(a) \frac{(b - a)^2}{2!} - \dots - f^{(n)}(a) \frac{(b - a)^n}{n!} - Q \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!} = 0.$$

Consideremos la función

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - f'(x) \frac{(b - x)}{n!} - f''(x) \frac{(b - x)^2}{2!} - \dots - f^{(n)}(x) \frac{(b - x)^n}{n!} - Q \frac{(b - x)^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\text{ es } C^0 \text{ en } [a, b] \\ \varphi(x) &\text{ es } D' \text{ en } (a, b) \\ \varphi(a) &= \varphi(b) = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, por el Teorema de Rolle, $\varphi'(\xi) = 0$ para alguna ξ en (a, b) . Pero

$$\varphi'(\xi) = -f^{(n+1)}(\xi) \frac{(b - \xi)^n}{n!} + Q \frac{(b - \xi)^n}{n!}.$$

En consecuencia

$$Q = f^{(n+1)}(\xi),$$

y se sigue el teorema.

Nota: Esta es una ley generalizada del valor medio del que el Teorema de Cauchy es un caso especial. Es esencialmente una expansión de Taylor con restante.

8.42. Definiciones. Una función de simple valuación de $f(x)$ se dice que es *analítica* en $x = x_0$ si y sólo si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

converge a $f(x)$ en la vecindad de $x = x_0$.

Si $f(x)$ es analítica en cada punto de (a, b) , entonces se dice que $f(x)$ es *analítica en* (a, b) .

8.43. Teorema. Las funciones analíticas son una subclase de las funciones C^∞ .

Demostración: $f(x) = e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$, $f(x) = 0$, $x = 0$, es C^∞ , pero no es analítica en $x = 0$.

FUNCIONES DE DOS VARIABLES

8.44. Definiciones. Sea $P : (a, b)$ cualquier punto de un plano referido al sistema de ejes rectangulares coordenados. Describamos un círculo de radio δ alrededor del punto P . El interior de este círculo es llamado un *dominio de P de norma δ* .

Una *región R* , es el conjunto de puntos tal que cada punto de él tiene un dominio del cual cada punto está en R .

Una región, R , está *conectada* cuando dos cualesquiera de sus puntos pueden ser unidos por medio de una trayectoria poligonal que esté contenida totalmente en R .

Si la frontera de una región conectada es una curva cerrada sin puntos dobles, la llamamos una *región simple*.

Una región más sus fronteras es llamada una *región cerrada*. Sin las fronteras la región es *abierta*.

Una *vecindad* de un punto (a, b) es una región abierta conteniendo al punto (a, b) .

Ejemplos

(1) Región rectangular:

x en el intervalo I_1
 y en el intervalo I_2 .

La región rectangular es cerrada si I_1 e I_2 son cerradas; de otro modo la región es abierta. La región rectangular es finita si I_1 e I_2 son finitas; de otro modo la región es infinita.

(2) Región circular:

$$\left. \begin{array}{l} (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta \text{ abierta} \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq \delta \text{ cerrada} \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 \geq \delta \text{ infinita} \end{array} \right\} \text{ finita}$$

8.45. Definiciones. u es una función de simple valuación de x y y en una región R si para cada pareja de valores (x, y) en R corresponde un valor real único de u . R es llamada el dominio de definición de la función.

Ejemplos

Función	Dominio de Definición
(1) $\sqrt{1-x^2-y^2}$	$x^2 + y^2 \leq 1$
(2) $\sqrt{x^2+y^2-1}$	$x^2 + y^2 \geq 1$
(3) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y}$	$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

8.46. Definición. Supongamos que $f(x, y)$ está definida en la vecindad de (a, b) , excepto tal vez en (a, b) . Si dada una $\epsilon > 0$, tan pequeña como se quiera, existe una $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - A| < \epsilon \text{ cuando } 0 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta,$$

entonces decimos que A es el límite de $f(x, y)$ en (a, b) y escribimos

$$\lim_{\substack{x=a \\ y=b}} f(x, y) = A.$$

8.47. Contenido geométrico del Art. 8.46. Supongamos que la superficie $z = f(x, y)$ está construida como se indica en la Fig. 8.17. Entonces, si para dos planos cualesquiera $z = A + \epsilon$ y $z = A - \epsilon$, puede encontrarse un δ tal que el cilindro sobre el círculo de radio δ y centro (a, b) en el plano xy , y que tiene

sus elementos paralelos al eje z , es cortado por la superficie sólo entre los dos planos, entonces

$$\lim_{\substack{x=a \\ y=b}} f(x, y) = A.$$

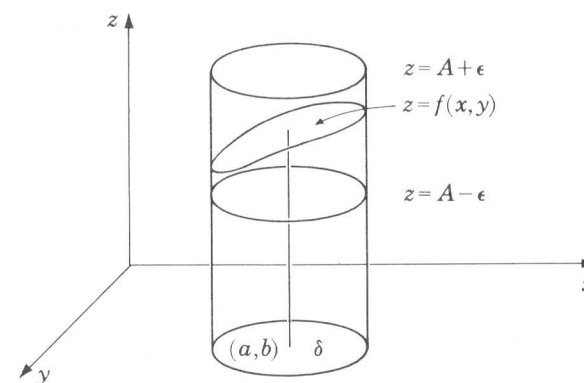


FIGURA 8.17

8.48. Teorema. No es necesariamente cierto que

$$\lim_{x=a} \lim_{y=b} f(x, y) = \lim_{y=b} \lim_{x=a} f(x, y).$$

Demostración: $\lim_{x=0} \lim_{y=0} \frac{x-y}{x+y} = +1,$

y

$$\lim_{y=0} \lim_{x=0} \frac{x-y}{x+y} = -1.$$

8.49. Teorema. No es necesariamente cierto que

$$\lim_{\substack{x=a \\ y=b}} f(x, y) = \lim_{x=a} \lim_{y=b} f(x, y).$$

Demostración: Si siempre

$$\lim_{\substack{x=a \\ y=b}} f(x, y) = \lim_{x=a} \lim_{y=b} f(x, y),$$

entonces, por la simetría del lado izquierdo, deberíamos tener siempre

$$\lim_{\substack{x=a \\ y=b}} f(x, y) = \lim_{y=b} \lim_{x=a} f(x, y),$$

$$\lim_{x=a} \lim_{y=b} f(x, y) = \lim_{y=b} \lim_{x=a} f(x, y).$$

Pero esto no es cierto, por el Art. 8.48.

8.50. Teorema. Si $\lim_{\substack{x=a \\ y=b}} f(x, y)$ tiene el mismo valor A cuando

$(x, y) \rightarrow (a, b)$ a lo largo de cualquier rayo que pase por (a, b) , entonces no es necesariamente cierto que

$$\lim_{\substack{x=a \\ y=b}} f(x, y) = A.$$

Demostración: Construyamos una cardioide en el plano $z = 1$, teniendo el vértice en el punto $(0, 0, 1)$ y su eje paralelo al eje x . Con esta cardioide como generatriz, formamos el manto superior de un cono con vértice en el origen. Consideremos la función $z = f(x, y)$, donde, para toda (x, y) que no esté en la rama negativa del eje x , z es la ordenada, erigida en (x, y) , entre el plano xy y el cono, y donde, para toda (x, y) en la rama negativa del eje x , $z = 0$. (Véase la Fig. 8.18.)

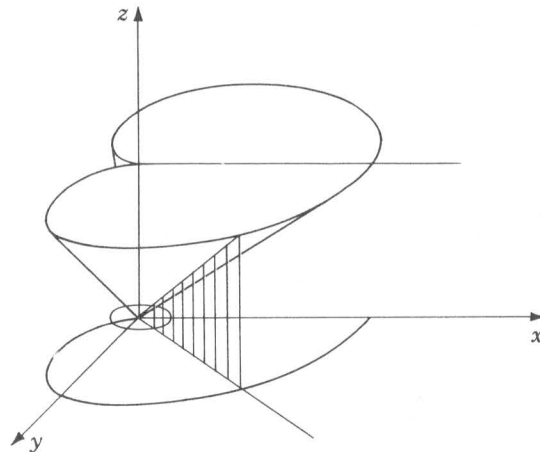


FIGURA 8.18

Ahora tomemos cualquier rayo que pase por el origen, que no sea rama negativa del eje x . Al moverse un punto hacia el origen por este rayo, su ordenada z bajo el cono se aproxima a 0 como límite. Al moverse un punto hacia el origen por la

rama negativa del eje x , z una vez más se aproxima a 0 como límite. En consecuencia

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y=0}} f(x, y) = 0$$

cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ en cualquier rayo que pase por $(0, 0)$.
Pero

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y=0}} f(x, y) \neq 0,$$

porque si tomamos $\epsilon = \frac{1}{2}$, digamos, entonces no existe δ tal que para toda (x, y) dentro del círculo con el origen como centro y δ como radio

$$|f(x, y)| < \epsilon.$$

Porque la proyección de la cardioide sobre el plano xy debe estar también en este círculo, y para cualquier punto, en esta proyección $f(x, y) = 1$.

8.51. Teorema. Si $\lim_{\substack{x=a \\ y=b}} f(x, y) = A$, entonces

$$\lim_{x=a} f(x, b) = A \quad \text{y} \quad \lim_{y=b} f(a, y) = A.$$

Demostración: Si $\lim_{\substack{x=a \\ y=b}} f(x, y)$ existe y es igual a A , entonces también existirá y será igual a A cuando $(x, y) \rightarrow (a, b)$ a lo largo de cualquier curva, v.g., a lo largo de $y = b$ o a lo largo de $x = a$.

8.52. Definiciones. (a) $\lim_{\substack{x=a \\ y=b}} f(x, y) = \infty$ si y sólo si $\lim_{\substack{x=a \\ y=b}} 1/f(x, y) = 0$, o si y sólo si para una g positiva arbitraria dada, tan grande como se quiera, existe una $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y)| > g \quad \text{cuando} \quad 0 < (x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta.$$

(b) $\lim_{\substack{x=\infty \\ y=\infty}} f(x, y) = A$ si y sólo si $\lim_{\substack{t=0 \\ u=0}} f(1/t, 1/u) = A$.

(c) $\lim_{\substack{x=\infty \\ y=\infty}} f(x, y) = \infty$ si y sólo si $\lim_{\substack{t=0 \\ u=0}} 1/f(1/t, 1/u) = 0$.

8.53. Definición. Una función de simple valuación $f(x, y)$ es continua en (a, b) si y sólo si

- (1) $f(x, y)$ está definida en la vecindad de (a, b) ,
 (2) $\lim_{\substack{x=a \\ y=b}} f(x, y)$ existe,
 (3) $\lim_{\substack{x=a \\ y=b}} f(x, y) = f(a, b)$.

8.54. Teorema. Si $f(x, y)$ es continua en (a, b) , entonces $f(a, y)$ es una función continua de y en $y = b$, y $f(x, b)$ es una función continua de x en $x = a$.

Demostración: Por el Art. 8.51.

8.55. Teorema. Si $f(x, y)$ es continua en ambas variables separadamente, entonces no es necesariamente continua en ambas variables juntas.

Demostración: Consideremos la función

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy/(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ f(x, y) &= 0, \quad x^2 + y^2 = 0. \end{aligned}$$

Ahora, $f(0, y) = 0, y \neq 0$. Por lo tanto

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(0, y) = 0 = f(0, y_0).$$

También, como por definición $f(0, 0) = 0$,

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0 = f(0, 0).$$

En consecuencia la función dada es continua para toda y . Por simetría, es también continua para toda x . Pero

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) \neq f(0, 0) = 0,$$

para que sea $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ a lo largo de la línea $y = mx$. Entonces, para este enfoque,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \frac{m}{1 + m^2} \neq 0.$$

En consecuencia la función dada es discontinua en $(0, 0)$.

8.56. Definiciones. $f(x, y)$ tiene una *discontinuidad amovible* en (a, b) si se vuelve continua en (a, b) después de haber sido definida o redefinida en (a, b) .

$f(x, y)$ tiene una *discontinuidad aislada* en (a, b) si existe una vecindad de (a, b) en la cual éste es el único punto de discontinuidad de $f(x, y)$. De otra manera una discontinuidad se dice que es *no aislada*.

8.57. Definición. Si existe una G tal que $|f(x, y)| < G$ cuando (x, y) está en R , entonces se dice que $f(x, y)$ está *circunscrita* en R .

Nota: Una función $f(x, y)$ puede ser finita a través de una región R y sin embargo no estar circunscrita en R , v.g.,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1/xy, \quad xy \neq 0 \\ f(x, y) &= 0, \quad xy = 0 \end{aligned}$$

en la región $R: x^2 + y^2 < 1$.

8.58. Definición. $f(x, y)$ tiene una *derivada parcial con respecto a x* en (a, b) si y sólo si

(1) $f(x, y)$ está definida en la vecindad de (a, b) ,

(2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$ existe.

Simbólicamente, escribimos la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x en (a, b) como

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=a \\ y=b}} \quad \text{o} \quad f_x(a, b).$$

Las derivadas parciales de orden mayor son fácilmente definibles.

8.59. Definición. $f(x, y)$ es de *clase C^n* en una región abierta R si tiene derivadas parciales enésimas continuas en toda R .

8.60. Ley de la media para dos variables (primera forma). Si $f(x, y)$:

(1) es continua en x y y separadamente en la región R' :

$$x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y, \quad y$$

(2) posee derivadas parciales con respecto a x y y en la región R :

$$x_0 \leq x < x_0 + \Delta x, y_0 < y \leq y_0 + \Delta y,$$

entonces existen algunas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en R tales que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_1, y_1)\Delta x + f_y(x_2, y_2)\Delta y.$$

Demostración: $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

$$= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

$$= f_x(x_1, y_1)\Delta x + f_y(x_2, y_2)\Delta y \quad \text{por el Art. 8.39,}$$

donde

$$\left. \begin{array}{l} x_0 < x_1 < x_0 + \Delta x \\ y_1 = y_0 + \Delta y \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x_2 = x_0 \\ y_0 < y_2 < y_0 + \Delta y \end{array} \right\}.$$

Nota: Este teorema obviamente se amplía para cualquier número de variables.

8.61. Ley de la media para dos variables (segunda forma). Bajo las condiciones del Art. 8.60, existe una θ tal que

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ = f_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x + f_y(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y, \end{aligned} \quad (1)$$

donde $0 < \theta < 1$.

Demostración: El resultado del Art. 8.60 puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ = f_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f_y(x_0 + \theta'\Delta y)\Delta y, \end{aligned}$$

donde $0 < \theta < 1$, y $0 < \theta' < 1$. Ahora consideremos la función auxiliar

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + t\Delta y).$$

Por el Art. 8.39, tenemos

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi_t(\theta), \quad 0 < \theta < 1.$$

Esto nos da nuestro resultado.

8.62. Teorema. Si $u = f(x, y)$ y si

(1) u es continua en x y y separadamente en la región R' :

$$x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y,$$

(2) u es de clase C^1 en R : $x_0 \leq x < x_0 + \Delta x, y_0 < y \leq y_0 + \Delta y$,

(3) x y y son funciones diferenciables de una variable r , entonces

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r_0} = f_x(x_0, y_0) \left. \frac{dx}{dr} \right|_{r_0} + f_y(x_0, y_0) \left. \frac{dy}{dr} \right|_{r_0}$$

Demostración: Por el Art. 8.60, tenemos

$$\Delta u = f_x(x_1, y_1)\Delta x + f_y(x_2, y_2)\Delta y.$$

En consecuencia

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = f_x(x_1, y_1) \frac{\Delta x}{\Delta r} + f_y(x_2, y_2) \frac{\Delta y}{\Delta r}.$$

Haciendo $\Delta r \rightarrow 0$, y como $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son continuas en (x_0, y_0) , obtenemos el resultado deseado.

8.63. Ley de la media para dos variables (tercera forma). Si a las condiciones del Art. 8.60 les añadimos que $f(x, y)$ es de clase C^1 en R , entonces

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ = f_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x + f_y(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y, \end{aligned}$$

donde $0 < \theta < 1$.

Demostración: Consideremos la función auxiliar

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y).$$

Por el Art. 8.39,

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi_t(\theta), \quad 0 < \theta < 1. \quad (1)$$

Ahora, por el Art. 8.62,

$$\varphi_t = f_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x + f_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y.$$

Sustituyendo esto en (1) obtenemos el resultado deseado.

Nota: Esta forma es conocida como la *forma simétrica* de la Ley de la Media para Dos Variables.

8.64. Ley de la media para dos variables (cuarta forma). Bajo las condiciones del Art. 8.63, tenemos

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \eta\Delta x + \xi\Delta y, \end{aligned}$$

donde

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \eta = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \xi = 0. \quad (1)$$

Demostración: Como $f(x, y)$ es de clase C^1 en R ,

$$\left. \begin{aligned} f_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \Delta y) &= f_x(x_0, y_0) + \eta, & 0 < \theta < 1 \\ f_y(x_0 + \theta'\Delta y) &= f_y(x_0, y_0) + \xi, & 0 < \theta' < 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

donde η y ξ satisfacen (1). En consecuencia, sustituyendo (2) en (1) del Art. 8.61 obtenemos el resultado deseado.

8.65. Teorema. Si $f(x, y)$ es de clase C^2 en una vecindad de (a, b) , entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

DERIVADAS DIRECCIONALES

8.66. Definiciones. Una *dirección*, s_α , en un punto (a, b) es la dirección del segmento dirigido de (a, b) hasta $(a + r \cos \alpha, b + r \sin \alpha)$, $r > 0$.

$f(x, y)$ tiene una *derivada direccional* en (a, b) si y sólo si (1) $f(x, y)$ está definida en la vecindad de (a, b) ,

(2) $\lim_{r \rightarrow 0} [f(a + r \cos \alpha, b + r \sin \alpha) - f(a, b)]/r$ existe, $r > 0$.

Escribimos este límite simbólicamente como

$$\left. \frac{\partial f}{\partial s_\alpha} \right|_{x=a, y=b} \quad \text{o} \quad \frac{\partial f(a, b)}{\partial s_\alpha}.$$

8.67. Teorema. Si $f(x, y)$ es de clase C^1 en la vecindad de (a, b) , entonces

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial s_\alpha} = f_x(a, b) \cos \alpha + f_y(a, b) \sin \alpha.$$

Demostración: Tomemos r suficientemente pequeña de tal modo que

$$(a + r \cos \alpha, b + r \sin \alpha)$$

cae dentro de la vecindad. Entonces, por el Art. 8.64,

$$\begin{aligned} f(a + r \cos \alpha, b + r \sin \alpha) - f(a, b) \\ = f_x(a, b)r \cos \alpha + f_y(a, b)r \sin \alpha + \eta r \cos \alpha + \xi r \sin \alpha. \end{aligned}$$

Dividiendo todo entre r y procediendo entonces al límite como $r \rightarrow 0$, obtenemos el resultado deseado.

8.68. Teorema. Si $f(x, y)$ es de clase C^1 en la vecindad de (a, b) , entonces

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial s_0} = f_x(a, b), \quad \frac{\partial f(a, b)}{\partial s_{\pi/2}} = f_y(a, b),$$

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial s_\pi} = -f_x(a, b), \quad \frac{\partial f(a, b)}{\partial s_{3\pi/2}} = -f_y(a, b).$$

De una manera más general,

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial s_\alpha} = - \frac{\partial f(a, b)}{\partial s_{\alpha+\pi}}.$$

Demostración: Este teorema se sigue inmediatamente del Art. 8.67.

8.69. Definición. Como se indica en la Fig. 8.19, supongamos una función $f(x, y)$ de clase C^1 definida en una vecindad de $P: (a, b)$, y sea C una curva diferenciable que pasa por P . Sea $P': (a + \Delta x, b + \Delta y)$ un segundo punto de C y también dentro de la vecindad de definición de $f(x, y)$. Sea Δs la longitud del arco PP' , tomada positiva o negativa de acuerdo con que PP' sea o no en la dirección de la curva escogida como positiva. Entonces

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta s}$$

es llamado la *derivada direccional* de $f(x, y)$ en (a, b) a lo largo de la curva C .

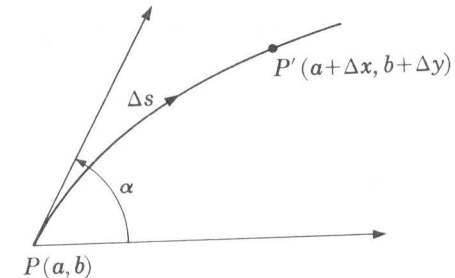


FIGURA 8.19

8.70. Teorema. La derivada direccional de $f(x, y)$ en (a, b) a lo largo de la curva diferenciable C es la derivada direccional en (a, b) en la dirección de la tangente en (a, b) a C .

Demostración:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta s} \\ = f_x(a, b) \frac{dx}{ds} + f_y(a, b) \frac{dy}{ds} \quad \text{por el Art. 8.62} \\ = f_x(a, b) \cos \alpha + f_y(a, b) \sin \alpha \\ = \frac{\partial f(a, b)}{\partial s_\alpha}. \end{aligned}$$

8.71. Definición. $v(x, y)$ es *conjugada* de $u(x, y)$ en una región R si y sólo si

(1) ambas u y v son de clase C^1 en R ,

(2) $\frac{\partial u(a, b)}{\partial s_\alpha} = \frac{\partial v(a, b)}{\partial s_{\alpha+\pi/2}}$, para cualquier punto (a, b) de R y para cualquier dirección s_α .

8.72. Teorema. Si $v(x, y)$ es conjugada de $u(x, y)$, entonces $-u(x, y)$ es conjugada de $v(x, y)$.

Demostración: Por hipótesis,

$$\frac{\partial u}{\partial s_\alpha} = \frac{\partial v}{\partial s_{\alpha+\pi/2}}, \text{ para toda } \alpha.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial u}{\partial s_{\alpha+\pi/2}} = \frac{\partial v}{\partial s_{\alpha+\pi}} = -\frac{\partial v}{\partial s_\alpha} \quad \text{por el Art. 8.68}$$

8.73. Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que $v(x, y)$ sea conjugada de $u(x, y)$ en R es que

(1) $u(x, y)$ y $v(x, y)$ sean de clase C^1 en R ,

(2) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ en R .

Necesaria: Tenemos que en R

$$\frac{\partial u}{\partial s_\alpha} = \frac{\partial v}{\partial s_{\alpha+\pi/2}}, \text{ para toda } \alpha.$$

En consecuencia, en particular, podemos hacer $\alpha = 0$ y $\pi/2$. Encontramos (por el Art. 8.68)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1)$$

Suficiente: Supongamos que las Ecs. (1) son ciertas en toda R . Ahora, por el Art. 8.67,

$$\frac{\partial u}{\partial s_\alpha} = u_x(a, b) \cos \alpha + u_y(a, b) \sin \alpha,$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s_{\alpha+\pi/2}} &= v_x(a, b) \cos(\alpha + \pi/2) + v_y(a, b) \sin(\alpha + \pi/2) \\ &= -v_x(a, b) \sin \alpha + v_y(a, b) \cos \alpha. \end{aligned}$$

En consecuencia, en virtud de (1),

$$\frac{\partial u}{\partial s_\alpha} = \frac{\partial v}{\partial s_{\alpha+\pi/2}}, \text{ para cualquier } \alpha,$$

y $v(x, y)$ es conjugada de $u(x, y)$ en R .

Ejemplo

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

8.74. Definición. Las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

son conocidas como las *ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann*.

8.75. Definiciones. $f(x, y)$ es *armónica* en la región R si y sólo si

(1) $f(x, y)$ es de clase C^2 en R ,

(2) $\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} = 0$ para todo punto (a, b) de R .

La ecuación diferencial de (2) es conocida como la *ecuación diferencial de Laplace*.

8.76. Teorema. Si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son de clase C^2 en R , y si $v(x, y)$ es conjugada de $u(x, y)$ en R , entonces $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son armónicas en R .

Demostración: Se nos da

$$\begin{cases} u, v \text{ de clase } C^2 \text{ en } R, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ en } R. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

En consecuencia, por el Art. 8.65,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

y u es armónica en R . De una manera semejante, v es armónica en R .

8.77. Teorema. Las ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann en términos de coordenadas polares son

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Demostración: Ya que v es conjugada de u ,

$$\frac{\partial u}{\partial s_\alpha} = \frac{\partial v}{\partial s_{\alpha+\pi/2}}.$$

Por el Art. 8.69 (véase Fig. 8.20),

$$\frac{\partial u}{\partial s_{\theta_0}} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{u(r_0 + \Delta r, \theta_0) - u(r_0, \theta_0)}{\Delta r} = \frac{\partial u(r_0, \theta_0)}{\partial r}$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial s_{\theta_0+\pi/2}} = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{v(r_0, \theta_0 + \Delta \theta) - v(r_0, \theta_0)}{r_0 \Delta \theta} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial v(r_0, \theta_0)}{\partial \theta}.$$

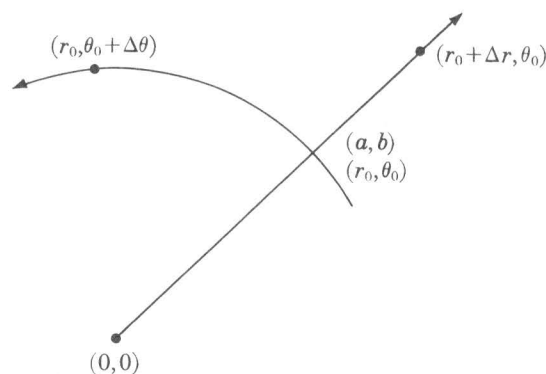


FIGURA 8.20

Por lo tanto

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

De una manera semejante, encontraríamos

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

8.78. Teorema. La ecuación diferencial de Laplace en coordenadas polares es

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0,$$

o

$$r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Demostración: Tenemos $x = r \cos \theta$, y $y = r \sin \theta$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Diferenciando otra vez, encontramos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial u}{\partial y \partial x} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \theta,$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial u}{\partial y \partial x} r^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \theta \\ &\quad - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial y} r \sin \theta. \end{aligned}$$

Entonces encontramos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Nota: Desde luego, el Art. 8.77 podría haberse establecido también por cambio de variable.

8.79. Teorema. Si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son de clase C^1 en R , donde

$$\frac{\partial u}{\partial s_{\alpha_1}} = \frac{\partial v}{\partial s_{\alpha_1 + \pi/2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial s_{\alpha_2}} = \frac{\partial v}{\partial s_{\alpha_2 + \pi/2}}, \quad (1)$$

donde $\alpha_1 - \alpha_2 \neq n\pi$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), entonces v es conjugada de u en R .

Demostración: Sea s_α cualquier dirección, y sea (a, b) cualquier punto de R . Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial s_\alpha} = u_x(a, b) \cos \alpha + u_y(a, b) \sin \alpha. \quad (2)$$

Ahora, ya que $\alpha_1 - \alpha_2 \neq n\pi$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), podemos expresar a s_α linealmente en función de s_{α_1} y s_{α_2} . Así

$$s_\alpha = \lambda s_{\alpha_1} + \mu s_{\alpha_2},$$

o

$$\begin{cases} \cos \alpha = \lambda \cos \alpha_1 + \mu \cos \alpha_2, \\ \sin \alpha = \lambda \sin \alpha_1 + \mu \sin \alpha_2 \end{cases} \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s_\alpha} &= \lambda \{u_x(a, b) \cos \alpha_1 + u_y(a, b) \sin \alpha_1\} \\ &\quad + \mu \{u_x(a, b) \cos \alpha_2 + u_y(a, b) \sin \alpha_2\} \\ &= \lambda \frac{\partial u}{\partial s_{\alpha_1}} + \mu \frac{\partial u}{\partial s_{\alpha_2}}. \end{aligned}$$

De una manera semejante, tenemos, con las mismas constantes de dependencia,

$$\frac{\partial v}{\partial s_{\alpha + \pi/2}} = \lambda \frac{\partial v}{\partial s_{\alpha_1 + \pi/2}} + \mu \frac{\partial v}{\partial s_{\alpha_2 + \pi/2}}.$$

Por lo tanto, en virtud de (1), tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial s_\alpha} = \frac{\partial v}{\partial s_{\alpha + \pi/2}}, \text{ para cualquier } \alpha,$$

de lo cual v es conjugada de u en R , porque u y v son también de clase C^1 en R .



Alternativa: Se nos da en R que

$$u_x \cos \alpha_1 + u_y \sin \alpha_1 = -v_x \sin \alpha_1 + v_y \cos \alpha_1.$$

En consecuencia

$$\cos \alpha_1(u_x - v_y) + \sin \alpha_1(u_y + v_x) = 0.$$

De una manera semejante,

$$\cos \alpha_2(u_x - v_y) + \sin \alpha_2(u_y + v_x) = 0.$$

Pero

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 \end{vmatrix} &= \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ &= \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

ya que $\alpha_1 - \alpha_2 \neq n\pi$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Por lo tanto, debemos tener

$$u_x - v_y = 0 \quad \text{y} \quad u_y + v_x = 0,$$

que son las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En consecuencia, v es conjugada de u en R .

8.80. Teorema. Si $u(x, y)$ es de clase C^2 en R , entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_\alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s_{\alpha + \pi/2}^2} \quad (1)$$

es independiente en R de α .

Demostración: Representando los operadores $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ por Δ_1 y Δ_2 , respectivamente, y representando $\cos \alpha$ y $\sin \alpha$ por c y s , respectivamente, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial s_\alpha} = (\Delta_1 c + \Delta_2 s)u.$$

Por lo tanto tenemos, simbólicamente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_\alpha^2} = (\Delta_1 c + \Delta_2 s)^2 u,$$

con una expresión semejante para $\partial^2/\partial s_{\alpha + \pi/2}^2$. Pero tenemos

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -s,$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = c.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial s_\alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s_{\alpha+\pi/2}^2} &= \{(\Delta_1 c + \Delta_2 s)^2 + (-\Delta_1 s + \Delta_2 c)^2\} u \\ &= \{\Delta_1^2(c^2 + s^2) + \Delta_2^2(c^2 + s^2)\} u \\ &= \{\Delta_1^2 + \Delta_2^2\} u \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\end{aligned}$$

un resultado independiente de α .

Corolario: Si u es armónica en R , entonces (1) se desvanece en R para cualquier α .

8.81. Teorema. Si $u(x, y)$ es de clase C^4 en R , entonces

$$\frac{\partial^4 u}{\partial s_{\alpha_1}^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial s_{\alpha_2}^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial s_{\alpha_3}^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial s_{\alpha_4}^4}$$

es independiente de α_1 en R , donde

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{4}, \quad \alpha_3 = \alpha_2 + \frac{\pi}{4}, \quad \alpha_4 = \alpha_3 + \frac{\pi}{4}.$$

Demostración: Usando la misma notación que en el Art. 8.80, tenemos, simbólicamente,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial s_{\alpha_1}^4} = (\Delta_1 c + \Delta_2 s)^4 u,$$

con expresiones semejantes para

$$\frac{\partial^4 u}{\partial s_{\alpha_2}^4}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial s_{\alpha_3}^4}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial s_{\alpha_4}^4}.$$

Ahora se demuestra rápidamente que

$$\begin{aligned}\cos \alpha_2 &= (c - s)/\sqrt{2}, & \cos \alpha_3 &= -s, & \cos \alpha_4 &= (-c - s)/\sqrt{2}, \\ \sin \alpha_2 &= (c + s)/\sqrt{2}, & \sin \alpha_3 &= c, & \sin \alpha_4 &= (c - s)/\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 u}{\partial s_{\alpha_1}^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial s_{\alpha_2}^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial s_{\alpha_3}^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial s_{\alpha_4}^4} &= \left\{ (\Delta_1 c + \Delta_2 s)^4 + \left(\Delta_1 \frac{c - s}{\sqrt{2}} + \Delta_2 \frac{c + s}{\sqrt{2}} \right)^4 + (-\Delta_1 s + \Delta_2 c)^4 \right. \\ &\quad \left. + \left(\Delta_1 \frac{-c - s}{\sqrt{2}} + \Delta_2 \frac{c - s}{\sqrt{2}} \right)^4 \right\} u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \left\{ (\Delta_1 c + \Delta_2 s)^4 + \left[\frac{(\Delta_1 c + \Delta_2 s)}{\sqrt{2}} + \frac{(-\Delta_1 s + \Delta_2 c)}{\sqrt{2}} \right]^4 + (-\Delta_1 s + \Delta_2 c)^4 \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{-(\Delta_1 c + \Delta_2 s)}{\sqrt{2}} + \frac{(-\Delta_1 s + \Delta_2 c)}{\sqrt{2}} \right]^4 \right\} u \\ &= \frac{3}{2} \{ (\Delta_1 c + \Delta_2 s)^4 + 2(\Delta_1 c + \Delta_1 s)^2(-\Delta_1 s + \Delta_2 c)^2 + (-\Delta_1 s + \Delta_2 c)^4 \} u \\ &= \frac{3}{2} \{ (\Delta_1 c + \Delta_2 s)^2 + (-\Delta_1 s + \Delta_2 c)^2 \}^2 u \\ &= \frac{3}{2} \{ \Delta_1^2 + \Delta_2^2 \}^2 u \\ &= \frac{3}{2} (u_{1111} + 2u_{1122} + u_{2222}),\end{aligned}$$

un resultado independiente de α_1 .

INTEGRALES LINEALES

8.82. Definición. Un arco es *regular* si puede ser representado en forma paramétrica por

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

donde

- (1) φ, ψ son de clase C^1 en I , $I = [t_0, t_1]$,
- (2) $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0$ en I ,
- (3) $\varphi(t) = \varphi(t')$ or $\psi(t) = \psi(t')$ implica que en I , $t = t'$.

Nota: (1) y (2) establecen que la pendiente del arco es siempre continua y determinada (puede ser 0 o ∞), y (3) establece que el arco es monótonico en cada una de las x y y . Así un arco regular no tiene puntos dobles.

8.83. Definición. Una *curva regular* es una curva constituida de un número finito de arcos regulares unidos extremo con extremo. En consecuencia, una curva regular puede ser representada por medio de un solo parámetro, s , la longitud de arco, que está definido por

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Como t es una función continua de simple valuación de s , también x y y son funciones continuas de simple valuación de s , y podemos siempre representar una curva regular por

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s), \end{cases} \quad 0 \leq s \leq l,$$

donde l es la longitud total de la curva. (Véase Fig. 8.21.)

Nota: Aun cuando un arco regular no tiene punto doble, una curva regular puede tener uno.

8.84. Definición. Una *curva regular simple* es una curva regular sin puntos dobles. Analíticamente,

$$\varphi(s) = \varphi(s'),$$

$$\psi(s) = \psi(s')$$

tiene la solución única $s = s'$ si $0 < s, s' < l$. Hay que notar que los puntos extremos no están considerados. De este modo una curva regular puede ser una curva cerrada.

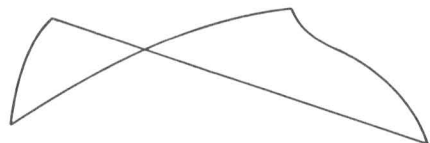


FIGURA 8.21

8.85. Teorema de Jordan. Cualquier curva cerrada regular simple divide al plano en dos regiones: la región exterior conteniendo el punto infinito, y la región interior.

(Aceptamos aquí este teorema sin demostración.)

8.86. Definición. Una región R es *simplemente conectada* si toda curva cerrada regular simple en R no contiene puntos de la frontera de R en su interior.

8.87. Definición. Sea $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$ la representación paramétrica de alguna curva regular C en función de su longitud de arco s . Tomemos $n + 1$ valores s_i tales que

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n = l,$$

y escojamos s'_k tal que $s_k \leq s'_k \leq s_{k+1}$. Sea

$$x'_k = \varphi(s'_k), \quad y'_k = \psi(s'_k).$$

También sea s''_k cualquier valor, tal vez s'_k , tal que

$$s_k \leq s''_k \leq s_{k+1}.$$

Establezcamos $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$, y consideremos $f(x, y, s)$ definida a lo largo de C . Entonces si

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta s_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(x'_k, y'_k, s''_k) \Delta s_k \quad (1)$$

existe, se denotará por

$$\int_C f(x, y, s) ds,$$

o

$$\int_0^l f(\varphi(s), \psi(s), s) ds,$$

y será llamado la *integral lineal* de $f(x, y, s)$ a lo largo de C desde $s = 0$ hasta $s = l$.

8.88. Teorema. Si $f(x, y, s)$ es continua en un dominio D , incluyendo la curva C desde $s = 0$ hasta $s = l$, entonces el límite (1) del Art. 8.87 existe. (Véase. Fig. 8.22.)

(Tomamos este teorema de la teoría de funciones reales.)

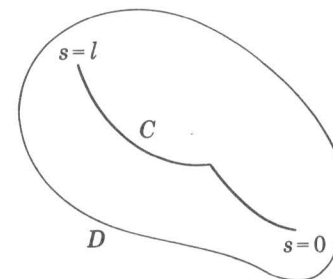


FIGURA 8.22

8.89. Definición. Si

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max |\Delta x_k| \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(x'_k, y'_k) \Delta x_k, \quad (1)$$

bajo la notación del Art. 8.87, y donde $\Delta x_k = \varphi(s_{k+1}) - \varphi(s_k)$ y $f(x, y)$ es alguna función de x , y definida a lo largo de C , existe, se denotará por

$$\int_{(a,b)}^{(a',b')} f(x, y) dx,$$

o

$$\int_0^l f(\varphi(s), \psi(s)) \varphi'(s) ds,$$

y será llamada la *integral lineal a lo largo de C* de $f(x, y)$ con respecto a x .

Nota: Si C es el eje x , entonces la integral lineal con respecto a x a lo largo de C se reduce a la integral ordinaria con respecto a x .

8.90. Teorema. Si $f(x, y)$ es continua en un dominio D , incluyendo a la curva regular C desde $s = 0$ hasta $s = l$, entonces el límite (1) del Art. 8.89 existe.

(Tomamos este teorema de la teoría de funciones reales.)

8.91. Teorema. Si $P(x, y)$, $Q(x, y)$ son de clase C^1 en un dominio D simplemente conectado en el cual

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y},$$

y si C es una curva *cerrada* regular arbitraria en D , entonces

$$\int_C (P dx + Q dy) = 0.$$

(Tomamos este teorema de la teoría de funciones reales.)

8.92. Teorema. Si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son de clase C^1 en un dominio D simplemente conectado, y si L es una curva regular arbitraria en D conectando (a, b) , (x, y) de D , entonces una condición necesaria y suficiente para que

$$F(x, y) = \int_{(a,b)_L}^{(x,y)} (P dx + Q dy)$$

sea independiente de L en D es que, en D ,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

$F(x, y)$, es así de simple valuación, y, en D ,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

(Tomamos este teorema de la teoría de funciones reales.)

TEORIA ELEMENTAL DE CONJUNTOS DE PUNTOS

8.93. Definición. (a, b) es un *punto límite* de un conjunto E si toda vecindad de (a, b) contiene puntos de E que no son (a, b) .

Ejemplos

(1) 0 es un punto límite de $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$.

(2) 0 es un punto límite de $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$.

Así, un punto límite puede no pertenecer al conjunto E .

8.94. Definición. (a, b) es un *punto aislado* de E si pertenece a E y no es un punto límite de éste.

8.95. Definición. El conjunto E es *circunscrito* si todo punto de él está en alguna vecindad de $(0, 0)$.

8.96. Definición. El conjunto E es *cerrado* si es circunscrito y contiene a todos sus puntos límite.

8.97. Definición. El conjunto E es *perfecto* si es cerrado y si todos sus puntos son puntos límite (o si ningún punto de E es aislado).

Ejemplo: E es igual a todos los puntos de $[0, 1]$.

8.98. Teorema de Bolzano-Weierstrass (para dos dimensiones). Si E está circunscrito y contiene infinitos puntos, entonces existe por lo menos un punto límite.

Demostración: Como E está circunscrito, podemos encontrar una G tal que todos los puntos E caen en S :

$$S: \begin{cases} -G \leq x \leq G, \\ -G \leq y \leq G. \end{cases}$$

Dividimos esta región cuadrada en cuatro (véase la Fig. 8.23). Entonces debe haber infinitos puntos por lo menos en una de estas subregiones. Llamemos a esta S_1 . Entonces tenemos

$$S_1: \begin{cases} A_1 \leq x \leq B_1, \\ a_1 \leq y \leq b_1, \end{cases}$$

$$B_1 - A_1 = b_1 - a_1 = G/2.$$

De una manera semejante dividamos en cuatro a S_1 y seleccionemos S_2 como una de las subregiones que contiene infinitos puntos. Entonces tenemos

$$S_2: \begin{cases} A_2 \leq x \leq B_2, \\ a_2 \leq y \leq b_2, \end{cases}$$

$$B_2 - A_2 = b_2 - a_2 = G/4.$$

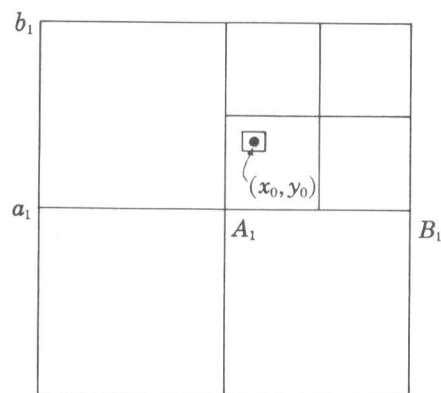


FIGURA 8.23

Continuando de esta manera, obtenemos

$$S_n: \begin{cases} A_n \leq x \leq B_n, \\ a_n \leq y \leq b_n, \end{cases}$$

$$B_n - A_n = b_n - a_n = G/2^n.$$

Entonces tenemos

$$\left. \begin{aligned} A_1 &\leq A_2 \leq A_3 \leq \cdots \leq A_n < G \\ B_1 &\geq B_2 \geq B_3 \geq \cdots \geq B_n > -G \end{aligned} \right\}.$$

Por lo tanto existen A y B tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B,$$

y

$$A_n \leq A \leq B \leq B_n.$$

Por lo tanto

$$0 \leq B - A \leq B_n - A_n = G/2^n,$$

de lo cual $B - A = 0$ o $B = A = x_0$, digamos. De una manera semejante, $b = a = y_0$.

Ahora construyamos un pequeño cuadrado T alrededor de (x_0, y_0) ;

$$T: \begin{cases} x_0 - \epsilon \leq x \leq x_0 + \epsilon, \\ y_0 - \epsilon \leq y \leq y_0 + \epsilon. \end{cases}$$

Tomemos S_n de tal modo que $G/2^n < \epsilon$. Entonces S_n cae dentro de T , porque

$$B_n - x_0 < B_n - A_n < G/2^n < \epsilon.$$

Por lo tanto

$$B_n < x_0 + \epsilon.$$

También,

$$x_0 - A_n < B_n - A_n < G/2^n < \epsilon.$$

Por lo tanto

$$A_n > x_0 - \epsilon.$$

En consecuencia

$$x_0 - \epsilon < A_n \leq x \leq B_n < x_0 + \epsilon.$$

Un resultado semejante se mantiene para a_n y b_n . Así vemos que (x_0, y_0) satisface la definición de punto límite.

8.99. Definición. (a, b) es un punto anterior de E si alguna vecindad de E contiene sólo puntos de E .

8.100. Definición. E es conectado si dos puntos cualesquiera de él pueden ser unidos por medio de una línea quebrada con un número finito de segmentos, todos los puntos de la cual están en E .

8.101. Definición. E forma un dominio, o un continuo abierto, o una región abierta si todos los puntos son interiores y si E es conectada.

8.102. Definición. La frontera del dominio D es el conjunto de los puntos límite de D que no están en D .

8.103. Definición. Un punto frontera del dominio D es un punto tal que cualquier vecindad de él contiene puntos de D , y por lo menos un punto que no es de D (que puede ser él mismo).

8.104. Definición. Una región es un dominio con ninguno, alguno, o todos sus puntos frontera.

8.105. Ejemplos que ilustran la posible complejidad de una frontera. (a) Tomemos como dominio el medio plano superior excepto los puntos

$$x = \frac{m}{n!}, \quad y = \frac{1}{n!}, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 1, 2, 3, \dots).$$

La frontera del dominio consiste en estos puntos aislados y el eje x . E es ciertamente conectado. (Véase Fig. 8.24.)

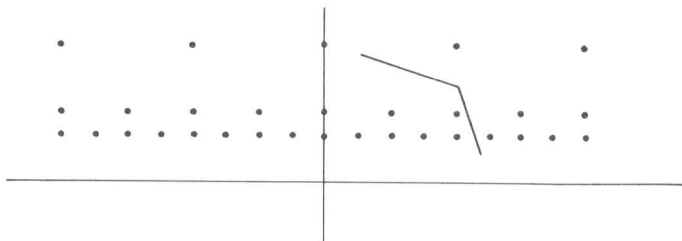


FIGURA 8.24

(b) Tomemos como dominio el medio plano superior excepto los puntos entre $y = 0$ y $y = 1$ en las líneas $x = 1/n$, ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$). (Véase Fig. 8.25.)

8.106. Teorema (un inverso del Art. 8.76). Si $u(x, y)$ es de clase C^2 en R y satisface la ecuación diferencial de Laplace, entonces existe una función $v(x, y)$, determinada excepto por una constante aditiva, tal que v es conjugada de u en R .

Demostración: Se nos da que, en R ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Definimos v de tal modo que

$$v = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + C. \quad (2)$$

Esta integral existe ya que el integrando es continuo y, más aún, por el Art. 8.92, es independiente de la trayectoria curva regular en tanto que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

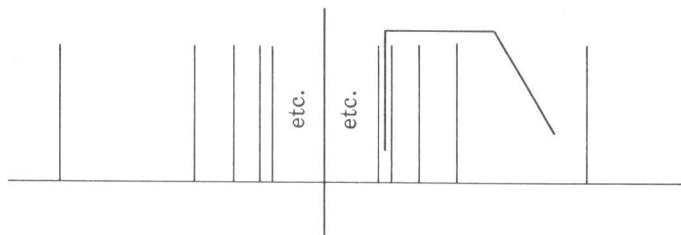


FIGURA 8.25

en virtud de (1). Diferenciando parcialmente v con respecto a x , y usando el Art. 8.92, tenemos

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

De una manera semejante, diferenciando con respecto a y , tenemos

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

En consecuencia el teorema por el Art. 8.73.

8.107. Alternativa del Art. 8.78. Por los Arts. 8.106 y 8.77, tenemos

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r}.$$

En consecuencia

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0.$$



CAPITULO 9

Funciones Analíticas de Variable Compleja

FUNCIONES, LIMITES, CONTINUIDAD

9.01. Teorema. Sea a cualquier punto en el plano complejo. Entonces

$$|z - a| < \rho$$

es una vecindad de a ,

y
$$|z| > \rho$$

es una vecindad de ∞ .

Demostración: Ver el Art. 8.44.

9.02. Definición. w es una *función de simple valuación* de z en R si para cada z en R hay sólo un valor de w .

9.03. Teorema. Si $z = x + iy$ y $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces w es una función de simple valuación de z en R si y sólo si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones de simple valuación de x y y en R .

9.04. Definición. Sea $f(z)$ definida en una vecindad suprimida de $z = a$. Entonces $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ existe y es igual a A si y sólo si a un número arbitrario positivo real ϵ corresponde una δ positiva tal que

$$|f(z) - A| < \epsilon \text{ cuando } 0 < |z - a| < \delta.$$

Contenido geométrico de la definición: La definición establece que si $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$, entonces, dada ϵ , podemos encontrar una δ tal que si z es cualquier punto (excepto el centro) dentro del círculo con centro en a y radio δ , entonces $w = f(z)$ es un punto dentro del círculo con centro en A y de radio ϵ (Véase la Fig. 9.1).

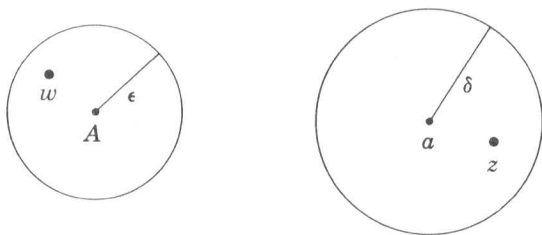


FIGURA 9.1

9.05. Definiciones. (a) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ si y sólo si $\lim_{z \rightarrow a} 1/f(z) = 0$; o si y sólo si para cualquier $G > 0$ dada, tan grande como se quiera, existe una $\delta > 0$ tal que

$$|f(z)| > G \text{ cuando } 0 < |z - a| < \delta.$$

(b) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A$ si y sólo si $\lim_{z \rightarrow 0} f(1/z) = A$.

(c) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ si y sólo si $\lim_{z \rightarrow 0} 1/f(1/z) = 0$.

9.06. Definición. $f(z)$ está *circunscrita* en R si $M > 0$ existe tal que, en R , $|f(z)| < M$.

9.07. Teorema. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y si $a = a' + ia''$, $A = A' + iA''$, entonces $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$ si y sólo si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a' \\ y \rightarrow a''}} u(x, y) = A' \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a' \\ y \rightarrow a''}} v(x, y) = A''.$$

Necesaria: Se nos da que

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A.$$

Esto es, dada ϵ_1 , existe una δ_1 tal que

$$|f(z) - A| < \epsilon_1 \text{ cuando } 0 < |z - a| < \delta_1,$$

o

$$(u - A')^2 + (v - A'')^2 < \epsilon_1^2 \text{ cuando } 0 < (x - a')^2 + (y - a'')^2 < \delta_1^2.$$

Ahora sea ϵ cualquier número positivo dado y escojamos $\epsilon_1 = \epsilon$. Esto nos da una δ_1 . Entonces, evidentemente,

$$|u - A'| < \epsilon_1 = \epsilon \text{ cuando } 0 < (x - a')^2 + (y - a'')^2 < \delta_1^2,$$

$$|v - A''| < \epsilon_1 = \epsilon \text{ cuando } 0 < (x - a')^2 + (y - a'')^2 < \delta_1^2.$$

En consecuencia

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a' \\ y \rightarrow a''}} u = A' \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a' \\ y \rightarrow a''}} v = A''.$$

Suficiente: Se nos da que

$$|u - A'| < \epsilon_1 \text{ cuando } 0 < (x - a')^2 + (y - a'')^2 < \delta_1^2,$$

$$|v - A''| < \epsilon_2 \text{ cuando } 0 < (x - a')^2 + (y - a'')^2 < \delta_2^2.$$

Ahora, sea ϵ cualquier número positivo dado y escojamos $\epsilon_1 =$

$\epsilon_2 = \epsilon/\sqrt{2}$. Entonces

$$(u - A')^2 + (v - A'')^2 < \epsilon^2 \text{ cuando } 0 < (x - a')^2 + (y - a'')^2 < \delta^2,$$

donde $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Esto es,

$$|f(z) - A| < \epsilon \text{ cuando } 0 < |z - a| < \delta.$$

En consecuencia

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A.$$

9.08. Teorema. Si $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$, entonces $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = |A|$.

9.09. Teorema. Si $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$, $\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = B$, entonces

$$(1) \lim_{z \rightarrow a} \{f(z) + \varphi(z)\} = A + B,$$

$$(2) \lim_{z \rightarrow a} \{f(z)\varphi(z)\} = AB,$$

$$(3) \lim_{z \rightarrow a} \{f(z)/\varphi(z)\} = A/B, \text{ si } B \neq 0.$$

Demostración: Estos resultados se siguen del Art. 9.07 y de los correspondientes teoremas para funciones de dos variables.

Demostración: Demostramos (3) solamente por vía de ilustración. Sea $f = u + iv$, y sea $\varphi = \sigma + i\tau$. Ahora, en una vecindad suficientemente pequeña de $z = a$, $\varphi \neq 0$. En consecuencia, en dicha vecindad

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{u + iv}{\sigma + i\tau} = \frac{(\sigma u + v\tau) + i(\sigma v - u\tau)}{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Pero $u \rightarrow A', v \rightarrow A'', \sigma \rightarrow B', \tau \rightarrow B''$, y, como $B \neq 0, B'^2 + B''^2 \neq 0$. En consecuencia

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f}{\varphi} = \frac{(B'A' + A''B'') + i(B'A'' - A'B'')}{B'^2 + B''^2} \\ = \frac{A' + iA''}{B' + iB''} = \frac{A}{B}.$$

Alternativa: Remplazamos a x en el Art. 8.11 por z . La demostración se mantiene aún.

9.10. Definición. $f(z)$ es *continua* en $z = a$ si y sólo si

- (1) $f(z)$ está definida en una vecindad de $z = a$,
- (2) $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ existe y es igual a $f(a)$.

9.11. Teorema. $f(z) = u + iv$ es continua en $z = a$, ($a = a' + ia''$), si y sólo si u y v son continuas en (a', a'') .

Demostración: Por el Art. 9.07.

9.12. Teorema. Si $f(z)$ y $\varphi(z)$ son continuas en $z = a$, entonces

- (1) $f(z) + \varphi(z)$ es continua en $z = a$,
- (2) $f(z)\varphi(z)$ es continua en $z = a$,
- (3) $f(z)/\varphi(z)$ es continua en $z = a$, si $\varphi(a) \neq 0$.

Demostración: Por el Art. 9.09.

9.13. Teorema. Si $f(z)$ es continua en $z = a$, entonces $|f(z)|$ es también continua en $z = a$.

Demostración: Por el Art. 9.08.

9.14. Teorema. Una función continua de una función continua es continua.

9.15. Teorema. Una función racional es continua excepto en sus polos.

9.16. Definición. Una función es continua en un dominio si y sólo si es continua en todos los puntos del dominio.

9.17. Teorema. Si $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$, entonces existe una δ tal que para cualquier $k > 0$,

$$|f(z)| < |A| + k, \text{ si } 0 < |z - a| < \delta.$$

Demostración: Por la definición de límite, podemos escoger una δ tal que,

$$|f(z)| - |A| \leq |f(z) - A| < k, \quad 0 < |z - a| < \delta.$$

9.18. Teorema. Si $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \neq 0$, entonces existe una δ tal que, para cualquier $k > 1$,

$$|f(z)| > \frac{|A|}{k}, \text{ si } 0 < |z - a| < \delta.$$

Demostración: Tenemos

$$|A| - |f(z)| \leq |f(z) - A| < \frac{(k-1)|A|}{k}, \quad 0 < |z - a| < \delta.$$

DIFERENCIABILIDAD

9.19. Definición. $f(z)$ tiene una *derivada* en $z = z_0$ si y sólo si

- (1) $f(z)$ está definida en la vecindad de $z = z_0$,

$$(2) \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \text{ existe.}$$

$$\text{Notación: } D_z f(z)|_{z=z_0}, \frac{df(z_0)}{dz}, f'(z_0).$$

9.20. Teorema. Si $f(z)$ tiene una derivada en z_0 , entonces $f(z)$ es continua en z_0 .

Demostración: Como en el Art. 8.27.

9.21. Teorema. Si $f'(z_0)$ y $\varphi'(z_0)$ existen, y si las funciones siguientes están definidas en la vecindad de z_0 , entonces en z_0

- (1) $D_z\{cf(z)\} = cD_z f(z)$,
- (2) $D_z\{f(z) + \varphi(z)\} = D_z f(z) + D_z \varphi(z)$,
- (3) $D_z\{f(z)\varphi(z)\} = f(z)D_z \varphi(z) + \varphi(z)D_z f(z)$,
- (4) $D_z\{f(z)/\varphi(z)\} = \{\varphi(z)D_z f(z) - f(z)D_z \varphi(z)\}/[\varphi(z)]^2 (\varphi \neq 0)$.

Demostración: Como en los reales.

9.22. Teorema. Dadas $w = f(s)$, $s = \varphi(z)$ y $s_0 = \varphi(z_0)$. Entonces, si $\varphi'(z_0)$ y $f'(s_0)$ existen, tenemos

$$D_z f\{\varphi(z)\}_{z=z_0} = f'\{\varphi(z_0)\}\varphi'(z_0).$$

Caso 1: $\varphi'(z_0) \neq 0$.

$$\frac{f\{\varphi(z_0 + \Delta z)\} - f\{\varphi(z_0)\}}{\Delta z} = \frac{f\{\varphi(z_0 + \Delta z)\} - f\{\varphi(z_0)\}}{\varphi(z_0 + \Delta z) - \varphi(z_0)} \cdot \frac{\varphi(z_0 + \Delta z) - \varphi(z_0)}{\Delta z}, \quad (1)$$

donde $0 < |\Delta z| < \delta$ para una δ suficientemente pequeña. Debido a que, por el Art. 9.18 (tomando $k = 2$),

$$\left| \frac{\varphi(z_0 + \Delta z) - \varphi(z_0)}{\Delta z} \right| > \frac{|\varphi'(z_0)|}{2}.$$

o

$$|\varphi(z_0 + \Delta z) - \varphi(z_0)| > \frac{|\varphi'(z_0)|}{2} |\Delta z| > 0,$$

donde $0 < |\Delta z| < \delta$ para una δ suficientemente pequeña. Por lo tanto, por (1), tomando límite cuando $\Delta z \rightarrow 0$, tenemos

$$D_z f\{\varphi(z)\}|_{z=z_0} = f'\{\varphi(z_0)\} \varphi'(z_0).$$

Caso 2: $\varphi'(z_0) = 0$.

$$(a) \quad \frac{f\{\varphi(z_0 + \Delta z)\} - f\{\varphi(z_0)\}}{\Delta z} = 0 \text{ si } \varphi(z_0 + \Delta z) - \varphi(z_0) = 0.$$

(b) si $\varphi(z_0 + \Delta z) - \varphi(z_0) \neq 0$, entonces

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f\{\varphi(z_0 + \Delta z)\} - f\{\varphi(z_0)\}}{\varphi(z_0 + \Delta z) - \varphi(z_0)} \cdot \frac{\varphi(z_0 + \Delta z) - \varphi(z_0)}{\Delta z}.$$

Entonces, por el Art. 9.17 (tomando $k = 1$),

$$\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| < \{|f'(s_0)| + 1\} \frac{|\varphi(z_0 + \Delta z) - \varphi(z_0)|}{|\Delta z|} < \epsilon,$$

donde $0 < |\Delta z| < \delta$ para una δ suficientemente pequeña, siendo ϵ un número arbitrario positivo.

En consecuencia, en cualquiera de los subcasos (a) o (b)

$$D_z f\{\varphi(z)\}|_{z=z_0} = 0 = f'\{\varphi(z_0)\} \varphi'(z_0).$$

9.23. Teorema. Una función racional de z tiene una derivada en todos los puntos excepto en sus polos.

Demostración: Por el Art. 9.21.

9.24. Ejemplo de una función compleja sin derivada. Consideremos

$$f(z) = 2x + 3iy.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{\{2(x_0 + \Delta x) + 3i(y_0 + \Delta y)\} - \{2x_0 + 3iy_0\}}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \frac{2\Delta x + 3i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \frac{2 + 3i\Delta y/\Delta x}{1 + i\Delta y/\Delta x}. \end{aligned}$$

Ahora, sea $\Delta z \rightarrow 0$ a lo largo de un rayo que pasa por z_0 de pendiente λ . Entonces

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{2 + 3i\lambda}{1 + i\lambda},$$

que obviamente varía con λ . En consecuencia la derivada no existe en z_0 .

Así, aun si u y v son funciones de clase C^1 en x y y , $u + iv$ no será en general una función diferenciable de z .

9.25. Definiciones. (a) Si z es una variable independiente, la *diferencial* de z , dz , está definida como

$$dz = \Delta z.$$

(b) Si z es una variable independiente y $w = f(z)$ es una función diferenciable de z , entonces la *diferencial* de w , dw , está definida como

$$dw = f'(z)dz.$$

9.26. Teorema. Si z es una variable independiente y $w = f(z)$ es una función diferenciable de z , entonces $dw = f'(z)dz$.

9.27. Teorema. Si $w = f(z)$ es una función diferenciable de z y $z = \varphi(s)$ es una función diferenciable de la variable independiente s , entonces

$$dw = f'(z) dz.$$

Demostración: $w = f(z)$ y $z = \varphi(s)$. Por lo tanto,

$$w = f\{\varphi(s)\}.$$

Entonces

$$dw = f' \{ \varphi(s) \} \varphi'(s) \Delta s \quad \text{por el Art. 9.25(b)}$$

Pero también

$$dz = \varphi'(s) \Delta s \quad \text{por el Art. 9.25(b)}$$

Por lo tanto, sustituyendo, obtenemos el teorema.

FUNCIONES ANALITICAS

9.28. Definición. Una función de simple valuación $f(z)$ es *analítica (regular, holomorfa, monogénica)* en $z = z_0$ si tiene una derivada en $z = z_0$.

9.29. Definición. $f(z)$ es *analítica en un dominio* si es analítica en todos los puntos del dominio.

9.30. Teorema. La suma, producto, o cociente de dos funciones analíticas es analítica, excepto en el último caso para puntos donde se desvanece el denominador.

Demostración: Este teorema se sigue de la definición y del Art. 9.21.

9.31. Teorema. Una función analítica de una función analítica es analítica.

Demostración: Por el Art. 9.22.

9.32. Teorema de Goursat. Si $f(z)$ tiene una derivada en todos los puntos de un dominio D , entonces dicha derivada es continua en D .

(Suponemos, por el momento, este teorema y lo demostraremos más tarde, en el Art. 17.02).

9.33. Teorema. Si $f(z)$ es analítica en D y si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces u y v son de clase C^1 en D .

Demostración: Tenemos, z_0 en D ,

$$\begin{aligned} & \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \frac{\{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)\} - \{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\}}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ahora, sea $\Delta z \rightarrow 0$ a lo largo de una línea paralela al eje x . Entonces $\Delta y = 0$ y (1) es

$$\begin{aligned} & \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Como existe el límite del miembro de la izquierda, entonces (por el Art. 9.07) existen los límites de sus partes reales e imaginarias. Pero esto simplemente significa que

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x}$$

existen en los puntos (x_0, y_0) , y que

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad (3)$$

Como $f'(z)$ es continua en z_0 (por el Art. 9.32), $\partial u/\partial x$ y $\partial v/\partial x$ son continuas en (x_0, y_0) .

Ahora, sea $\Delta z \rightarrow 0$ a lo largo de una línea paralela al eje y . Entonces $\Delta x = 0$ y (1) es

$$\begin{aligned} & \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y}. \end{aligned}$$

Como antes, vemos que

$$\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

existen en (x_0, y_0) , y

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad (4)$$

Y, de una manera semejante, $\partial v/\partial y$, $\partial u/\partial y$ son continuas en (x_0, y_0) .

9.34. Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica en un dominio D es que v sea conjugada de u en D .

Necesaria: Supongamos que $f(z)$ es analítica en D . Entonces, por el Art. 9.33, u y v son de clase C^1 en D . También, de (3) y (4) del Art. 9.33, tenemos, en D ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Pero éstas son las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En consecuencia, por el Art. 8.73, v es conjugada de u en D .

Suficiente: Supongamos que v es conjugada de u en D . Supongamos que z_0 y $z_0 + \Delta z$ están en D . Entonces, por el Art. 8.64, (1) del Art. 9.33 se convierte en (ya que u y v son C^1 en D)

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \eta_1\Delta x + \xi_1\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \\ &+ i \frac{v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \eta_2\Delta x + \xi_2\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \end{aligned}$$

Pero las ecuaciones de Cauchy-Riemann se mantienen para u y v . Por lo tanto tenemos

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + R, \quad (1)$$

donde

$$R = \frac{\eta_1\Delta x + \xi_1\Delta y + \eta_2\Delta x + \xi_2\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Ahora, sea ϵ cualquier número positivo. Entonces, ya que

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \eta_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \xi_1 = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \eta_2 = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \xi_2 = 0,$$

existen los números positivos $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ tales que

$$\begin{aligned} |\eta_1| &< \epsilon/2\sqrt{2} \text{ cuando } |\Delta x| < \delta_1, |\Delta y| < \delta_1, 0 < |\Delta x| + |\Delta y| \\ |\xi_1| &< \epsilon/2\sqrt{2} \text{ cuando } |\Delta x| < \delta_2, |\Delta y| < \delta_2, 0 < |\Delta x| + |\Delta y| \\ |\eta_2| &< \epsilon/2\sqrt{2} \text{ cuando } |\Delta x| < \delta_3, |\Delta y| < \delta_3, 0 < |\Delta x| + |\Delta y| \\ |\xi_2| &< \epsilon/2\sqrt{2} \text{ cuando } |\Delta x| < \delta_4, |\Delta y| < \delta_4, 0 < |\Delta x| + |\Delta y|. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} |R| &\leq \frac{\{|\eta_1| + |\eta_2|\}|\Delta x| + \{|\xi_1| + |\xi_2|\}|\Delta y|}{|\Delta x + i\Delta y|} \\ &< \frac{\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}|\Delta x| + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}|\Delta y|}{\frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{\sqrt{2}}} \quad \text{por el Art. 1.31} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

cuando

$$|\Delta x| < \delta, \quad |\Delta y| < \delta, \quad 0 < |\Delta x| + |\Delta y|,$$

donde

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4).$$

Por lo tanto

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} R = 0.$$

De (1) vemos que $f'(z_0)$ existe y

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).$$

Más aún, ya que u_x y v_x son continuas en D , entonces también $f'(z)$ es continua en D .

Nota: Si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto $z = z_0$, no se sigue que la función sea analítica en $z = z_0$. Consideremos, por ejemplo, la función

$$f(z) = \sqrt{|xy|}.$$

Aquí tenemos

$$u = \sqrt{|xy|}, \quad v = 0.$$

En consecuencia (Art. 8.58) para el punto $(0, 0)$ tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x \cdot 0|} - \sqrt{|0 \cdot 0|}}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot y|} - \sqrt{|0 \cdot 0|}}{y} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

En consecuencia las ecuaciones de Cauchy-Riemann se mantienen para $(0, 0)$. Pero $f(z)$ no es diferenciable en $(0, 0)$, porque

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} &= \frac{f(z)}{z} \\ &= \frac{\sqrt{|xy|}}{x + iy}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ahora, sean $x = \alpha r$, $y = \beta r$, $r > 0$, donde α y β son constantes. Entonces (1) se convierte en

$$\frac{r \sqrt{|\alpha\beta|}}{r(\alpha + i\beta)},$$

que en el límite cuando $r \rightarrow 0$ se convierte en

$$\frac{\sqrt{|\alpha\beta|}}{\alpha + i\beta},$$

un límite que no es único.

9.35. Teorema. Si $\{f(z) - f(z_0)\}/(z - z_0)$ tiende al mismo límite para todos los rayos que pasan por z_0 , entonces no se sigue que $f'(z_0)$ existe.

Demostración: Consideremos la función

$$f(z) = \frac{xy^2(x + iy)}{x^2 + y^4}, \quad z \neq 0$$

$$f(z) = 0, \quad z = 0.$$

Entonces, tomando $z_0 = 0$, tenemos

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

Ahora, sea $z \rightarrow 0$ a lo largo de cualquier rayo $y = mx$ por 0. Para dicho enfoque tenemos

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4} = 0.$$

Pero si $z \rightarrow 0$ a lo largo de la parábola $x = y^2$, encontramos

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}.$$

En consecuencia $f'(0)$ no existe.

Nota: Ver el Art. 8.50.

9.36. Formando parejas de funciones conjugadas. El Art. 9.34 nos da un medio para formar cualquier número de parejas de funciones conjugadas. Una forma obvia de obtener una función analítica de z es operar algebraicamente sobre z como un todo. Por ejemplo, podemos tomar

$$f(z) = (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3).$$

Entonces $3x^2y - y^3$ es conjugada de $x^3 - 3xy^2$.



CAPITULO 10

Funciones Trascendentales Elementales

EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

10.01. Teorema. Existe una función única $f(z)$ tal que

- (a) $f(z)$ es analítica,
- (b) $f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$,
- (c) $f(x) = e^x$, x real.

Demostración: Supongamos que tenemos una función $f(z)$ que satisface (a), (b) y (c). Entonces

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= f(x)f(iy) && \text{por (b)} \\ &= e^x f(iy) && \text{por (c)} \\ &= e^x \{f_1(y) + if_2(y)\}, && \text{digamos.} \end{aligned}$$

Entonces

$$u = e^x f_1(y) \quad y \quad v = e^x f_2(y). \quad (1)$$

Por lo tanto,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= e^x f_1'(y), & \frac{\partial v}{\partial y} &= e^x f_2'(y), \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x f_1(y), & \frac{\partial v}{\partial x} &= e^x f_2(y). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

En consecuencia, ya que, por (a), las ecuaciones de Cauchy-Riemann se mantienen, tenemos

$$f_1(y) = f_2'(y) \quad y \quad f_2(y) = -f_1'(y). \quad (3)$$

Por lo tanto,

$$f_2'(y) = -f_1''(y),$$

o

$$f_1''(y) + f_1(y) = 0. \quad (4)$$

De una manera semejante,

$$f_2''(y) + f_2(y) = 0. \quad (4')$$

[Como u y v son de clase C^1 , también, por (1), $f_1(y)$ y $f_2(y)$ son de clase C^1 . En consecuencia las Ecs. (2) se mantienen. Entonces, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, obtenemos (3). Pero en (3), como $f_1(y)$ y $f_2(y)$ son de clase C^1 , también $f_1'(y)$ y $f_2'(y)$ son de clase C^1 . Esto es, $f_1(y)$ y $f_2(y)$ son de clase C^2 . En consecuencia, tenemos las Ecs. (4) y (4').]

Resolviendo las ecuaciones diferenciales (4) y (4'), tenemos

$$\begin{aligned} f_1(y) &= A \cos y + B \operatorname{sen} y, \\ f_2(y) &= C \cos y + D \operatorname{sen} y. \end{aligned} \quad (5)$$

Por lo tanto

$$f(z) = e^x(A \cos y + B \operatorname{sen} y) + ie^x(C \cos y + D \operatorname{sen} y)$$

para toda z . En consecuencia, primero, hacemos $y = 0$. Entonces

$$f(x) = e^x A + ie^x C = e^x \quad \text{por (c).}$$

Por lo tanto

$$A = 1 \quad \text{y} \quad C = 0, \quad (6)$$

y tenemos ahora

$$f(z) = e^x(\cos y + B \operatorname{sen} y) + ie^x D \operatorname{sen} y.$$

Entonces, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, tenemos

$$\begin{aligned} \cos y + B \operatorname{sen} y &= D \cos y, \\ -\operatorname{sen} y + B \cos y &= -D \operatorname{sen} y. \end{aligned} \quad (7)$$

Haciendo $y = 0$, obtenemos

$$D = 1. \quad (8)$$

Haciendo $y = \pi/2$, obtenemos

$$B = 0. \quad (9)$$

En consecuencia, finalmente, tenemos sólo

$$f(z) = e^x\{\cos y + i \operatorname{sen} y\} \quad (10)$$

Ahora, esta función (10) fue obtenida de la suposición de que satisface (a), (b) y (c). Que satisface (a), (b) y (c) puede ser verificado así:

(a) $f(z)$ es ciertamente analítica en todas partes porque $u = e^x \cos y$ y $v = e^x \operatorname{sen} y$ son de clase C^1 en todas partes, y las ecuaciones de Cauchy-Riemann se mantienen en todas partes.

(b) Sean $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Entonces

$$\begin{aligned} f(z_1 + z_2) &= e^{x_1+x_2}\{\cos(y_1+y_2) + i \operatorname{sen}(y_1+y_2)\} \\ &= e^{x_1+x_2}\{\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 \\ &\quad + i \operatorname{sen} y_1 \cos y_2 + i \cos y_1 \operatorname{sen} y_2\} \\ &= e^{x_1}\{\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1\} e^{x_2}\{\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2\} \\ &= f(z_1)f(z_2). \end{aligned}$$

(c) Haciendo $y = 0$, obtenemos

$$f(x) = e^x.$$

En consecuencia el teorema.

Nota: Podemos remplazar la (b) anterior por

$$(b') f'(z) = f(z).$$

Supongamos que tenemos una función $f(x)$ que satisface (a), (b') y (c). Entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= f'(z) && \text{por (b')} \\ &= u_x + iv_x && \text{por (a).} \end{aligned}$$

En consecuencia

$$u - u_x = 0 \quad \text{y} \quad v - v_x = 0. \quad (11)$$

Resolviendo las ecuaciones diferenciales parciales (11), encontramos

$$u = f_1(y)e^x \quad \text{y} \quad v = f_2(y)e^x,$$

donde $f_1(y)$ y $f_2(y)$ son algunas funciones de y . Así, tenemos ahora

$$f(z) = e^x\{f_1(y) + f_2(y)i\}.$$

Procediendo como en lo anterior, encontramos

$$f_1(y) = \cos y \quad \text{y} \quad f_2(y) = \operatorname{sen} y,$$

y obtenemos (10) otra vez.

Probando (b'), encontramos

$$\begin{aligned} (b') \quad f'(z) &= \frac{\partial(e^x \cos y)}{\partial x} + i \frac{\partial(e^x \operatorname{sen} y)}{\partial x} \\ &= e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y \\ &= f(z). \end{aligned}$$

10.02. Definición. Definimos la función

$$f(z) = e^z (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

del Art. 10.01 como e^z .

10.03. Teorema. Si $f(z) = e^z$, entonces $f'(z) = f(z)$.

Demostración: Ver el final de la nota del Art. 10.01.

10.04. Teorema. $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$.

Demostración: Por el Art. 10.02.

10.05. Teorema. El número complejo z puede escribirse como

$$z = |z|e^{i \operatorname{arcc} z}.$$

Demostración: Por los Arts. 1.22 y 10.02.

10.06. Teorema. e^z es periódica de periodo $2\pi i$.

Demostración:

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^x \{ \cos(y+2\pi) + i \operatorname{sen}(y+2\pi) \} \\ &= e^x \{ \cos y + i \operatorname{sen} y \} \\ &= e^z. \end{aligned}$$

10.07. Definición. Si $e^w = z$, entonces escribimos $w = \log z$.

10.08. Teorema. $w = \log z$ existe en todos los puntos excepto $z = 0$, y es de infinita valuación.

Demostración: (1) Sea $z = 0$. Ahora, si $w = u + iv$ y $e^w = 0$, entonces tenemos

$$e^w = e^u (\cos v + i \operatorname{sen} v) = 0.$$

Por lo tanto

$$e^u \cos v = 0 \quad \text{y} \quad e^u \operatorname{sen} v = 0.$$

Pero $e^u \neq 0$. En consecuencia, $\cos v = \operatorname{sen} v = 0$, lo que es imposible para la misma v . En consecuencia, $w = \log z$ no está definida en $z = 0$.

(2) Sea $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \neq 0$. Entonces

$$e^w \cos v = r \cos \theta, \quad e^u \operatorname{sen} v = r \operatorname{sen} \theta. \quad (1)$$

Elevando al cuadrado las Ecs. (1) y sumando, tenemos

$$e^{2u} = r^2,$$

o

$$e^u = r > 0,$$

porque e^u y r son números positivos. Por lo tanto

$$\cos v = \cos \theta \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} v = \operatorname{sen} \theta,$$

de lo cual

$$v = \theta + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

En consecuencia, cuando $z \neq 0$,

$$\begin{aligned} \log z &= w \\ &= u + iv \\ &= \log r + i(\theta + 2k\pi) \end{aligned} \quad (2)$$

$$= \log |z| + i \operatorname{arco} z, \quad (3)$$

una función de infinita valuación.

Nota: $\log x$, ($x > 0$), es, por supuesto, una función real de simple valuación.

10.09. Superficie de Riemann para la función logarítmica. Tenemos

$$e^u = r, \quad v = \theta.$$

Así una $v =$ línea constante en el plano w va a $\theta =$ rayo constante en el plano z . En consecuencia, una cinta paralela al eje u y de 2π de ancho se convierte en el plano z total. En consecuencia el plano z debe ser reemplazado por una superficie z de ∞ hojas. Supondremos que las cintas del plano w están seleccionadas como en la Fig. 10.1. Entonces el eje x negativo en la superficie z se convierte en una línea de ramificación con pasos como se indica.

10.10. Definición. Definimos el *valor principal* de una función de múltiple valuación $\log z$ como la función de simple valuación $\operatorname{Log} z$, donde

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + i\theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

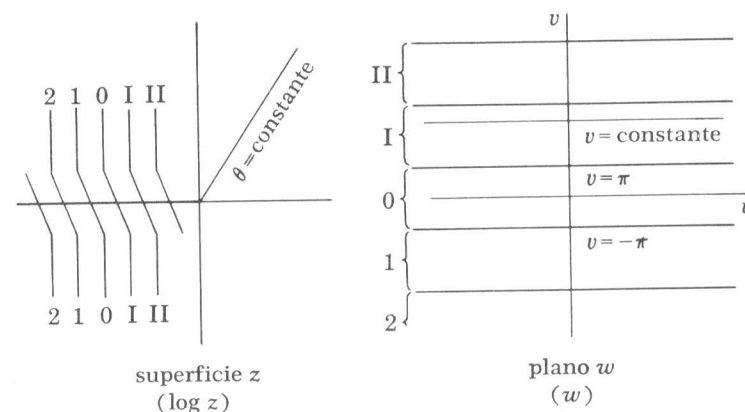


FIGURA 10.1

10.11. Teorema. $\text{Log}(-1) = i\pi$.

Demostración: $-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$.

10.12. Teorema. $\text{Log } z$ es analítica en toda su superficie de Riemann excepto en $z = 0$ y $z = \infty$.

Demostración: Tenemos $e^u = r$, ($r \neq 0, \infty$), $v = \theta$. En consecuencia

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r},$$

y se mantienen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (Art. 8.77). Más aún, u y v son claramente C^1 en toda la superficie de Riemann excepto en $z = 0$ y $z = \infty$. En consecuencia el teorema por el Art. 8.73.

Nota: $\text{Log } z$ es discontinua a lo largo del eje real negativo.

10.13. Teorema. $\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$, ($z \neq 0, \infty$), en la superficie de Riemann.

Demostración: Sea $w = \log z$. Entonces $z = e^w$. Como $\log z$ es analítica en toda la superficie de Riemann excepto en $z = 0, \infty$, dw/dz existe en todas partes excepto en esos puntos. Pero de $z = e^w$ encontramos

$$1 = e^w dw/dz,$$

de lo cual

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0, \infty.$$

Alternativa:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \log z &= \frac{\partial}{\partial x} \log r + i \frac{\partial}{\partial x} (\theta + 2k\pi) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} + i \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \begin{cases} r = (x^2 + y^2)^{1/2} \\ \theta = \tan^{-1} y/x \end{cases} \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} x(x^2 + y^2)^{-1/2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{x + iy} \\ &= \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

10.14. Teorema. La ecuación funcional

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$$

se mantiene solamente si las hojas están escogidas apropiadamente.

$$\begin{aligned} \text{Demostración:} \quad \log z_1 z_2 &= \log \{r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}\} \\ &= \log r_1 r_2 + i(\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi) \text{ por (2), Art. 10.08} \\ &= \log r_1 + i(\theta_1 + 2l\pi) + \log r_2 + i(\theta_2 + 2m\pi) \\ &= \log z_1 + \log z_2 \end{aligned}$$

si y sólo si $l + m = k$. Así dos de las hojas de Riemann pueden escogerse arbitrariamente, y entonces es determinada la tercera.

10.15. Definición. Si A y B son complejas, $A \neq 0$, entonces definimos A^B como

$$A^B \equiv e^{B \log A}$$

10.16. Teorema. A^B es de infinita valuación.

$$\begin{aligned} \text{Demostración:} \quad A^B &= e^{B \log A} \\ &= e^{B \log |A| + B i \alpha + B 2\pi i k} \\ &= e^{B \log |A|} (e^{B i \alpha}) (e^{B 2\pi i k}), \text{ por el Art. 10.01,} \end{aligned}$$

la cual es claramente de infinita valuación.

10.17. Teorema. Con una elección conveniente de hojas,

$$A^B A^C = A^{B+C}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Demostración:} \quad A^B &= e^{B \log A} = e^{B \log |A| + B i \alpha + B 2k\pi i}, \\ A^C &= e^{C \log A} = e^{C \log |A| + C i \alpha + C 2l\pi i}, \\ A^{B+C} &= e^{(B+C) \log |A| + (B+C) i \alpha + (B+C) 2n\pi i} \end{aligned}$$

En consecuencia

$$A^B A^C = A^{B+C}$$

si y sólo si

$$B 2k\pi i + C 2l\pi i = (B + C) 2n\pi i + 2m\pi i,$$

porque

$$e^{z_1} = e^{z_2}$$

si y sólo si, para algún entero m ,

$$z_1 = z_2 + 2m\pi i.$$

En consecuencia necesitamos que

$$Bk + Cl - (B + C)n = B(k - n) + C(l - n) = m. \quad (2)$$

Pero (2) se mantendrá en general si y sólo si

$$k = n, l = n, m = 0. \quad (3)$$

Así (1) se mantiene con las condiciones (3). Esto es, el producto de un valor de A^B por un valor de A^C es igual a algún valor de A^{B+C} .

10.18. Teorema. Con una elección conveniente de hojas,
 $(A^B)^C = A^{BC}.$

Demostración:

$$A^B = e^{B \log A},$$

de lo cual

$$(A^B)^C = e^{C \log(e^{B \log A})} = e^{BC \log A}.$$

Pero

$$A^{BC} = e^{BC \log A}$$

En consecuencia el teorema.

10.19. Teorema. Con una elección conveniente de hojas,

$$A^C B^C = (AB)^C. \quad (1)$$

Demostración:

$$A^C = e^{C \log |A| + Ci\alpha + C2k\pi i},$$

$$B^C = e^{C \log |B| + Ci\beta + C2l\pi i}.$$

Por lo tanto

$$A^C B^C = e^{C \log |AB| + Ci(\alpha + \beta) + C2(k+l)\pi i}$$

Pero

$$(AB)^C = e^{C \log |AB| + Ci(\alpha + \beta) + C2m\pi i}.$$

En consecuencia (1) se mantiene si y sólo si

$$Ck + Cl = Cm + n. \quad (2)$$

Pero (2) se mantendrá en general si y sólo si

$$k + l = m, \quad n = 0. \quad (3)$$

Así (1) se mantiene con las condiciones (3). Esto es, el producto de un valor A^C por un valor B^C da algún valor $(AB)^C$.

10.20. Teorema. Con una apropiada elección de hojas,

$$\log A^B = B \log A.$$

Demostración: $\log A^B = \log(e^{B \log A})$

$$= \log \{e^{B \log |A| + Bi\alpha + B2\pi ki}\}$$

$$= B\{\log |A| + i(\alpha + 2\pi k)\}.$$

Pero

$$B \log A = B\{\log |A| + i(\alpha + 2\pi l)\}.$$

En consecuencia el teorema.

$$\mathbf{10.21. Teorema.} \quad \frac{dA^z}{dz} = (\log A)A^z.$$

Demostración:

$$A^z = e^{z \log A}.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \frac{dA^z}{dz} &= \frac{d(e^{z \log A})}{dz} \\ &= e^{z \log A} \log A \quad \text{por el Art. 10.03} \\ &= (\log A)A^z. \end{aligned}$$

$$\mathbf{10.22. Teorema.} \quad \frac{dz^B}{dz} = Bz^{B-1}.$$

Demostración:

$$z^B = e^{B \log z}.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \frac{dz^B}{dz} &= \frac{d(e^{B \log z})}{dz} \\ &= e^{B \log z} \frac{B}{z} \quad \text{por los Arts. 10.03 y 10.13} \\ &= \frac{z^B B}{z} = Bz^{B-1}. \end{aligned}$$

TRIGONOMETRICAS Y TRIGONOMETRICAS INVERSAS

10.23. Teorema. Existen las funciones únicas $f(z)$ y $\varphi(z)$ tales que

- (a) $f(z)$ y $\varphi(z)$ son analíticas,
- (b) $f(z_1 + z_2) = f(z_1)\varphi(z_2) + f(z_2)\varphi(z_1),$
 $\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1)\varphi(z_2) - f(z_1)f(z_2),$
- (c) $f(x) = \sin x, \varphi(x) = \cos x, x$ real.

Demostración: Sean $f(z)$ y $\varphi(z)$ funciones que satisfacen a, b y c. Entonces

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= f(x)\varphi(iy) + f(iy)\varphi(x) && \text{por (b)} \\ &= \sin x \varphi(iy) + \cos x f(iy) && \text{por (c).} \end{aligned}$$

Sean

$$f(iy) = f_1(y) + if_2(y), \quad \varphi(iy) = \varphi_1(y) + i\varphi_2(y),$$

donde $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$, son funciones reales. Entonces, si

$$f(x + iy) = u + iv,$$

tenemos

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen} x \varphi_1 + \cos x f_1, \\ v &= \operatorname{sen} x \varphi_2 + \cos x f_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Ya que, por (a), $f(z)$ es analítica, u y v son de clase C^1 . En consecuencia, por (1), $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$ son de clase C^1 . Por lo tanto, tenemos

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \cos x \varphi_1 - \operatorname{sen} x f_1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \operatorname{sen} x \varphi_1' + \cos x f_1' \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \cos x \varphi_2 - \operatorname{sen} x f_2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \operatorname{sen} x \varphi_2' + \cos x f_2' \end{aligned} \right\}$$

Ahora, por (a), las ecuaciones de Cauchy-Riemann se mantienen, y tenemos

$$\left. \begin{aligned} \cos x(\varphi_1 - f_2') - \operatorname{sen} x(\varphi_2' + f_1) &= 0 \\ \cos x(f_1' + \varphi_2) + \operatorname{sen} x(\varphi_1' - f_2) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Haciendo $x = 0$ y $x = \pi/2$ en ese orden, obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 - f_2' &= 0, \quad \varphi_2' + f_1 = 0 \\ f_1' + \varphi_2 &= 0, \quad \varphi_1' - f_2 = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Entonces, como $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$ son de clase C^1 , se sigue de (3) que $f_1', f_2', \varphi_1', \varphi_2'$ son de clase C^1 , o que $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$ son de clase C^2 . Por lo tanto tenemos, diferenciando y sustituyendo en (3),

$$\left. \begin{aligned} f_1 - f_1'' &= 0, \quad f_2 - f_2'' = 0 \\ \varphi_1 - \varphi_1'' &= 0, \quad \varphi_2 - \varphi_2'' = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Resolviendo estas ecuaciones diferenciales, obtenemos

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= Ae^y + Be^{-y} \\ f_2 &= Ce^y + De^{-y} \\ \varphi_1 &= Ee^y + Fe^{-y} \\ \varphi_2 &= Ge^y + He^{-y} \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

En consecuencia, por (5), tenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv \\ &= \operatorname{sen} x(Ee^y + Fe^{-y}) + \cos x(Ae^y + Be^{-y}) \\ &\quad + i \operatorname{sen} x(Ge^y + He^{-y}) + i \cos x(Ce^y + De^{-y}). \end{aligned} \quad (6)$$

Haciendo $y = 0$, encontramos, por (c),

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen} x(E + F) + \cos x(A + B) \\ &\quad + i \operatorname{sen} x(G + H) + i \cos x(C + D) \\ &= \operatorname{sen} x\{(E + F) + i(G + H)\} \\ &\quad + \cos x\{(A + B) + i(C + D)\}. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\left. \begin{aligned} A + B &= 0, \quad C + D = 0 \\ G + H &= 0, \quad E + F = 1 \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

porque, como $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$ son reales, también lo son $A, B, \dots$. Por (7), entonces, (6) se convierte en

$$\begin{aligned} f(z) &= \operatorname{sen} x\{Ee^y + (1 - E)e^{-y}\} + \cos x(Ae^y - Ae^{-y}) \\ &\quad + i \operatorname{sen} x(Ge^y - Ge^{-y}) + i \cos x(Ce^y - Ce^{-y}). \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \cos x\{Ee^y + (1 - E)e^{-y}\} - \operatorname{sen} x(Ae^y - Ae^{-y}), \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \operatorname{sen} x(Ge^y + Ge^{-y}) + \cos x(Ce^y + Ce^{-y}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann y haciendo $y = 0$, tenemos

$$\cos x = \operatorname{sen} x(2G) + \cos x(2C),$$

y ahora haciendo $x = 0$ y $x = \pi/2$ en ese orden, encontramos

$$C = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad G = 0. \quad (8)$$

Una vez más,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \operatorname{sen} x\{Ee^y + (E - 1)e^{-y}\} + \cos x(Ae^y + Ae^{-y}), \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \cos x(Ge^y - Ge^{-y}) - \operatorname{sen} x(Ce^y - Ce^{-y}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann y haciendo $y = 0$, tenemos

$$\operatorname{sen} x(2E - 1) + \cos x(2A) = 0,$$

y ahora haciendo $x = 0$ y $x = \pi/2$ en ese orden, encontramos

$$A = 0 \text{ y } E = 1/2. \quad (9)$$

En consecuencia finalmente tenemos, sólo

$$f(z) = \operatorname{sen} x \{ \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \} + i \cos x \{ \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \} \quad (10)$$

$$= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \sinh y. \quad (11)$$

También tenemos, únicamente,

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi(x)\varphi(iy) - f(x)f(iy) \quad \text{por (b)} \\ &= \cos x \{ \varphi_1(y) + i\varphi_2(y) \} - \operatorname{sen} x \{ f_1(y) + if_2(y) \} \end{aligned}$$

$$= \cos x \{ \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \} - i \operatorname{sen} x \{ \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \} \quad (12)$$

$$= \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \sinh y. \quad (13)$$

Ahora, las funciones (11) y (13) se obtuvieron de la suposición de que satisfacían (a), (b) y (c). Que de hecho satisfacen (a), (b) y (c) puede verificarse directamente, así:

(a) $f(z)$ y $\varphi(z)$ son analíticas en todas partes ya que $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\sinh y$ y $\cosh y$ son diferenciables en todas partes.

(b) Esto se comprueba por sustitución.

(c) Simplemente hacemos $y = 0$ en los miembros de la izquierda y de la derecha de (11) y (13).

Nota: Podemos restringir el dominio en el que son analíticas en (a) a cualquier dominio que contenga los puntos $(0, 0)$ y $(\pi/2, 0)$. Entonces resulta que $f(z)$ y $\varphi(z)$ son analíticas en todas partes.

10.24. Definición. Definimos las funciones

$$f(z) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

$$\varphi(z) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \sinh y$$

como $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$, respectivamente.

$$\mathbf{10.25. Teorema.} \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Demostración: Tenemos (Art. 10.02)

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) - e^y(\cos x - i \operatorname{sen} x)}{2i}$$

$$= \frac{\cos x(e^{-y} - e^y) + i \operatorname{sen} x(e^{-y} + e^y)}{2i}$$

$$= \operatorname{sen} x \{ \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \} + i \cos x \{ \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \}$$

$$= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$= \operatorname{sen} z.$$

De una manera semejante,

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

10.26. Definición. $\tan z = \operatorname{sen} z / \cos z$, $\cot z = 1 / \tan z$, $\sec z = 1 / \cos z$ y $\csc z = 1 / \operatorname{sen} z$.

10.27. Teorema. Las identidades funcionales de la trigonometría real se mantienen para las funciones trigonométricas complejas.

10.28. Teorema. $\tan z$ y $\sec z$ son analíticas en todas partes excepto en $z = \pi/2 + k\pi$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), y $\cot z$ y $\csc z$ son analíticas en todas partes excepto en $z = k\pi$.

Demostración: La demostración se sigue a continuación de las definiciones del Art. 10.26.

10.29. Teorema. Tenemos las mismas fórmulas de diferenciación para las funciones trigonométricas complejas que para las reales.

10.30. Definición. Si $z = \operatorname{sen} w$, entonces escribimos $w = \operatorname{sen}^{-1} z$, etc., para las otras funciones.

10.31. Teorema. La función $w = \operatorname{sen}^{-1} z$ existe en cualquier z y es de infinita valuación.

Demostración:

$$z = \operatorname{sen} w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}.$$

También,

$$\sqrt{1 - z^2} = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}.$$

Por lo tanto

$$\sqrt{1 - z^2} - iz = e^{-iw},$$

o

$$-iw = \log \{ \sqrt{1 - z^2} - iz \}.$$

En consecuencia

$$w = i \log \{ \sqrt{1 - z^2} - iz \},$$

lo que ciertamente existe para toda z , siempre y cuando $\sqrt{1 - z^2} - iz \neq 0$, y es también de infinita valuación.

10.32. Superficie de Riemann para $w = \sin^{-1} z$. Sean

$$z = x + iy \quad y \quad w = u + iv.$$

Entonces

$$x = \sin u \cosh v \quad y \quad y = \cos u \sinh v. \quad (1)$$

Las gráficas de $t = \sinh v$ y $t = \cosh v$ son aproximadamente como se indica en la Fig. 10.2.

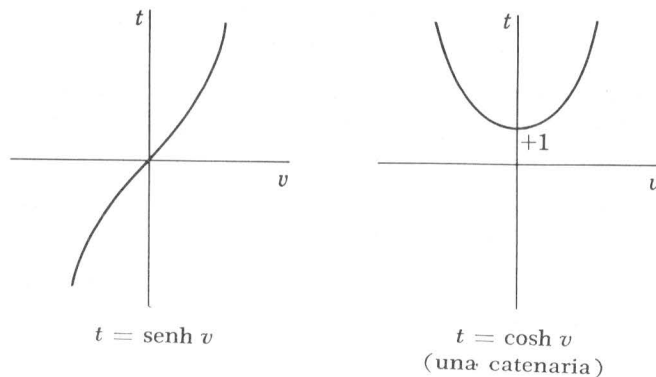


FIGURA 10.2

I. Puntos críticos. Tenemos

$$\frac{dz}{dw} = \cos w = 0$$

cuando

$$w = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots,$$

o cuando

$$z = \pm 1, \mp 1, \pm 1, \dots$$

En consecuencia $z = \pm 1$ son puntos críticos. Así el plano z debe ser remplazado por una superficie z de ∞ hojas teniendo ± 1 como puntos de ramificación posibles. Más aún, vemos que

$$\left. \begin{aligned} z = +1 \text{ da } w &= +\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, +\frac{5\pi}{2}, \dots \\ z = -1 \text{ da } w &= -\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \dots \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

II. Curvas correspondiendo a líneas $v = c$.

(a) $c > 0$. Entonces $\cosh c > 0$, y $\sinh c > 0$, y

$$\begin{aligned} x &= \sin u \cosh c, \\ y &= \cos u \sinh c. \end{aligned}$$

Eliminando u , tenemos la elipse

$$\left(\frac{x}{\cosh c} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sinh c} \right)^2 = 1. \quad (3)$$

Pero si hacemos variar a u desde $-\pi/2$ hasta $+\pi/2$, vemos que

$$x \text{ va desde } -\cosh c \text{ hasta } +\cosh c,$$

$$y \text{ va desde } 0 \text{ hasta } \sinh c \text{ hasta } 0.$$

En consecuencia el segmento lineal $v = c$, ($c > 0$), entre $u = \pm \pi/2$ se convierte en el arco superior de la elipse (3), como se indica en la Fig. 10.3. Los focos de la elipse son los puntos $(1, 0)$, $(-1, 0)$.

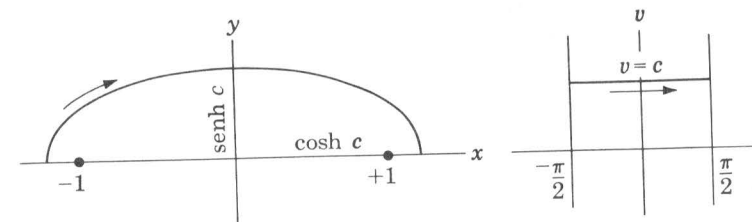


FIGURA 10.3

(b) $c < 0$. Entonces $\cosh c > 0$, $\sinh c < 0$. En consecuencia (como antes) el segmento lineal $v = c$, ($c < 0$), entre $u =$

$\pm\pi/2$ se convierte en el arco inferior de la elipse (3), como se indica en la Fig. 10.4.

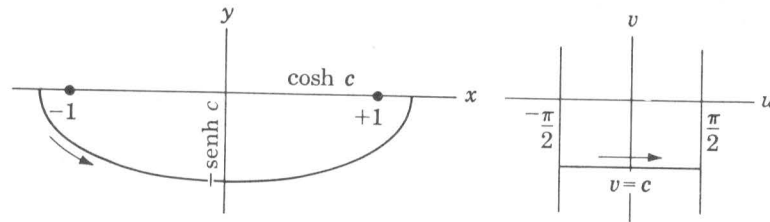


FIGURA 10.4

(c) $c = 0$. Entonces $\cosh c = 1$, $\sinh c = 0$. Por lo tanto, el segmento lineal $v = 0$ entre $u = \pm\pi/2$ se convierte en el segmento lineal $y = 0$ entre $x = \pm 1$, como se indica en la Fig. 10.5.

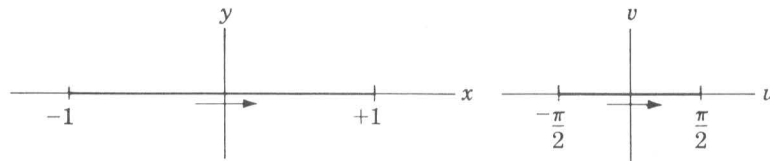


FIGURA 10.5

Sumando los resultados (a), (b) y (c), vemos que los segmentos lineales $v = c$ entre $u = \pm\pi/2$ se convierten en arcos de elipses confocales con sus focos en $(1, 0)$, $(-1, 0)$, cubriendo todo el plano finito una vez y sólo una. Tenemos resultados similares para cintas entre $\pi/2$ y $3\pi/2$, $-\pi/2$ y $-3\pi/2$, etc. En consecuencia, corresponde a cada una de estas cintas verticales un plano z . Más aún, aquellas partes de las cintas que se convierten en mitades superiores de hojas se indican en la Fig. 10.6.

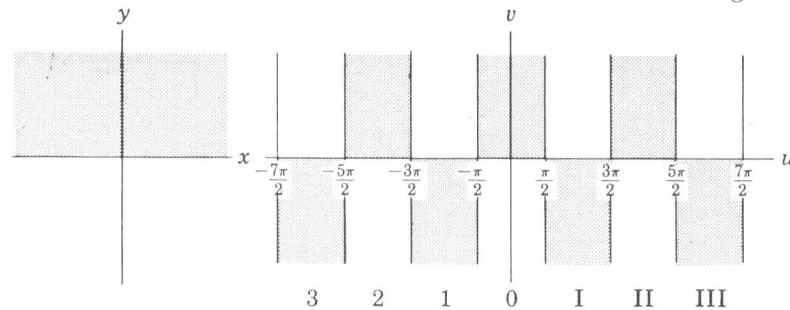


FIGURA 10.6

III. Curvas correspondientes a líneas $u = c$.

(a) c en el primer cuadrante. Entonces $\sen c > 0$, $\cos c > 0$, y

$$x = \sen c \cosh v, \quad y = \cos c \sinh v.$$

Eliminando a v por medio de la relación $\cosh^2 v - \sinh^2 v = 1$, tenemos la hipérbola

$$\left(\frac{x}{\sen c}\right)^2 - \left(\frac{y}{\cos c}\right)^2 = 1.$$

Si hacemos variar a v desde $-\infty$ hasta $+\infty$, vemos que

x va desde $+\infty$ hasta $\sen c$ hasta $+\infty$,
 y va desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

En consecuencia la línea $u = c$, ($0 < c < \pi/2$), se convierte en la rama de la derecha de la hipérbola, como se indica en la Fig. 10.7.

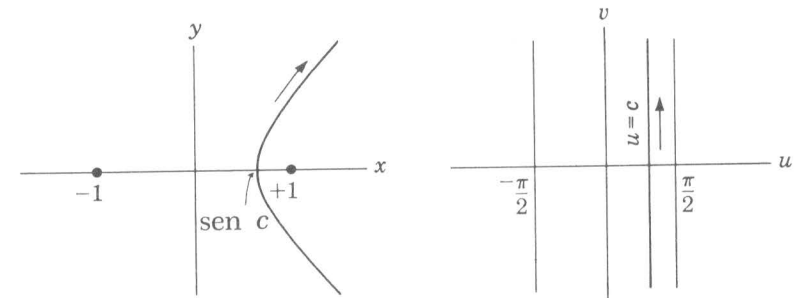


FIGURA 10.7

(b) c en el segundo cuadrante. Encontramos que $u = c$, ($\pi/2 < c < \pi$), se convierte en la rama de la derecha de la hipérbola, pero trazada en dirección opuesta a la de (a), como se indica en la Fig. 10.8.

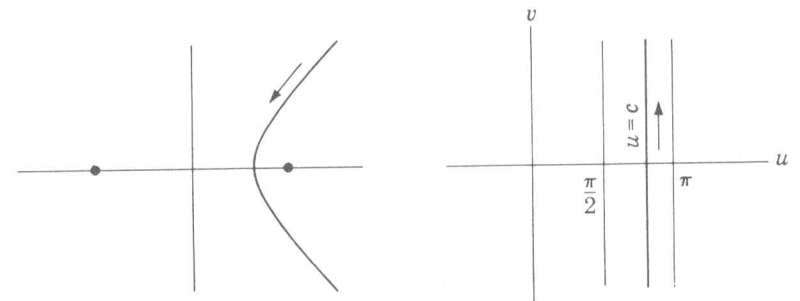


FIGURA 10.8

(c) c en el tercer cuadrante. Encontramos la situación indicada en la Fig. 10.9.

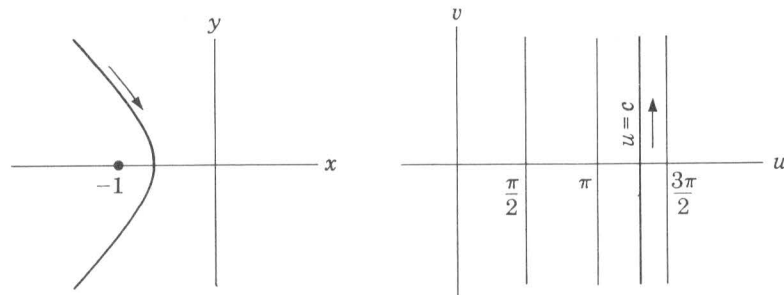


FIGURA 10.9

(d) c en el cuarto cuadrante. Encontramos la situación indicada en la Fig. 10.10.

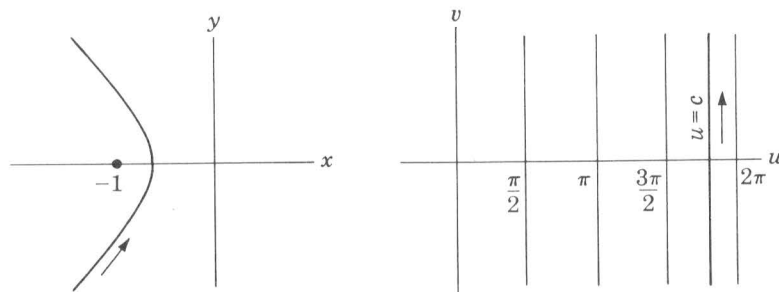


FIGURA 10.10

(e) c cuadrantal.

1. $c = 0$. Entonces $x = 0$, $y = \sinh v$, como se indica en la Fig. 10.11.

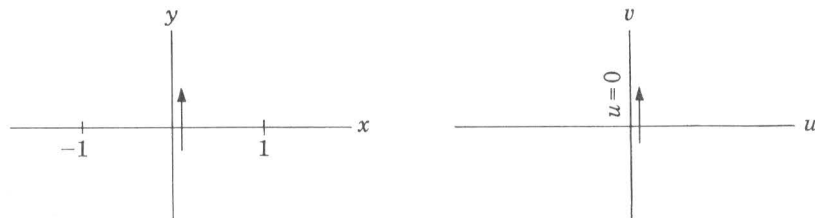


FIGURA 10.11

2. $c = \pi/2$. Entonces $x = \cosh v$, $y = 0$, como se indica en la Fig. 10.12.

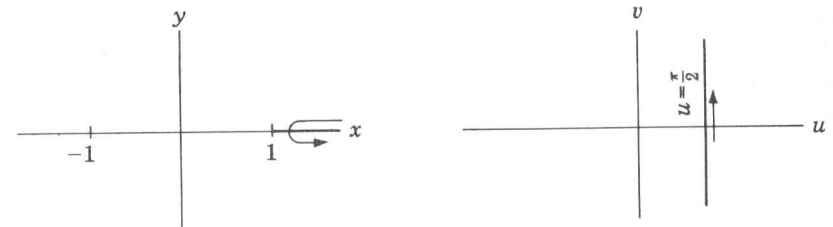


FIGURA 10.12

3. $c = \pi$. Entonces $x = 0$, $y = -\sinh v$, como se indica en la Fig. 10.13.

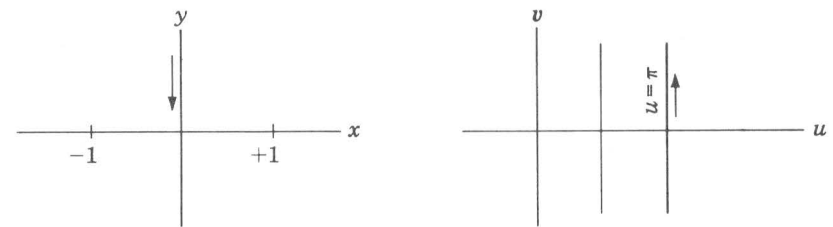


FIGURA 10.13

4. $c = 3\pi/2$. Entonces $x = -\cosh v$, $y = 0$, como se indica en la Fig. 10.14.

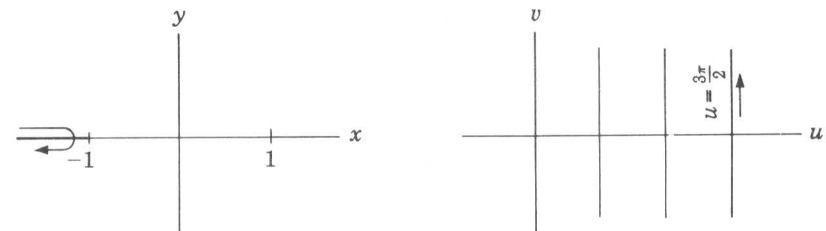


FIGURA 10.14

Sumando los resultados (a), (b), (c), (d) y (e), vemos que las líneas $u = c$ que caen dentro de la cinta $u = \pm \pi/2$ se convierten en ramas de hipérbolas cubriendo todo el plano una vez y sólo una. Tenemos resultados semejantes para las cintas $-\pi/2$ hasta $-3\pi/2$, $\pi/2$ hasta $3\pi/2$, etc. Estos resultados verifican nuestra elección previa de hojas. Las hipérbolas y elipses

forman un sistema ortogonal, como es evidente de la geometría analítica o de las propiedades conformantes de la proyección.

IV. *La superficie de Riemann.* De II o III construimos la superficie de Riemann para $w = \sin^{-1} z$ mostrada en la Fig. 10.15. Vemos que ± 1 son puntos de ramificación infinitamente múltiples, cada uno de segundo orden. ∞ es un punto de ramificación de orden infinito.

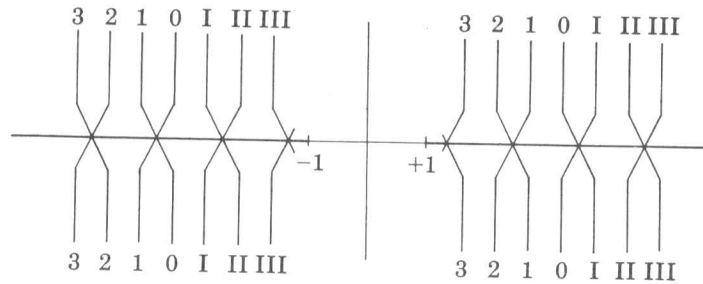


FIGURA 10.15

10.33. Superficie de Riemann para $w = \cos^{-1} z$. Usando el procedimiento del Art. 10.32, encontramos la situación indicada en la Fig. 10.16.

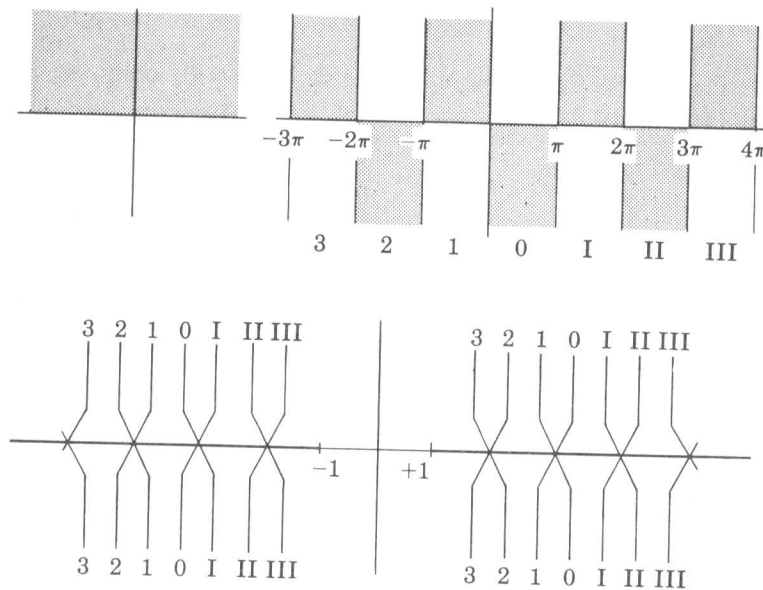


FIGURA 10.16

10.34. Teorema.

$$\tan z = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}.$$

Demostración:

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$$

$$= \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

por el Art. 10.25

$$= \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}.$$

10.35. Teorema.

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \log \frac{i - z}{i + z} = \frac{i}{2} \log \frac{i + z}{i - z}.$$

Demostración: Sea $z = \tan w$. Entonces, por el Art. 10.34,

$$z = \frac{1}{i} \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}.$$

En consecuencia

$$i + z = \frac{-2}{i(e^{2iw} + 1)},$$

y

$$i - z = \frac{-2e^{2iw}}{i(e^{2iw} + 1)}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{i - z}{i + z} = e^{2iw},$$

o

$$2iw = \log \frac{i - z}{i + z},$$

o

$$w = \frac{1}{2i} \log \frac{i - z}{i + z}.$$

También,

$$w = -\frac{i}{2} \log \frac{i - z}{i + z} = \frac{i}{2} \log \frac{i + z}{i - z}.$$

10.36. Problema. Discutamos $\lim e^z$ cuando $z \rightarrow \infty$ a lo largo de rayos que pasan por el origen; a lo largo de la hipérbola $xy = 1$ en las cuatro formas posibles.

Tenemos

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

1. Sea $z \rightarrow \infty$ a lo largo de un rayo que pasa por el origen.

a. Rayo que no es el eje y .

- (1) En el primero o cuarto cuadrantes. Aquí $x \rightarrow \infty$ a través de valores positivos, y $\lim e^z = \infty$, porque dada cualquier $G > 0$ existe una δ tal que

$$|e^z| = |e^x| = e^x > G \text{ cuando } |z| > |x| > \delta.$$

- (2) En el segundo o cuarto cuadrantes. Aquí $x \rightarrow \infty$ a través de valores negativos y $\lim e^z = 0$, porque dada $\epsilon > 0$ existe una δ tal que

$$|e^z| = |e^x| < \epsilon \text{ cuando } |z| > |x| > \delta.$$

- b. Rayo que es el eje y . Aquí $x = 0$ y $y \rightarrow \infty$. Por lo tanto, $\lim e^z$ no existe y no es infinito, porque

$$e^z = \cos y + i \sin y.$$

2. Sea $z \rightarrow \infty$ a lo largo de la hipérbola $xy = 1$ (véase la Fig. 10.17).

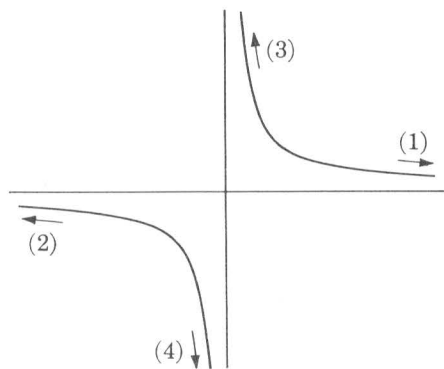


FIGURA 10.17

- a. A lo largo de la rama (1). Aquí $x \rightarrow \infty$ a través de valores positivos y $\lim e^z = \infty$.
 b. A lo largo de la rama (2). Aquí $x \rightarrow \infty$ a través de valores negativos y $\lim e^z = 0$.
 c. A lo largo de la rama (3) o (4). Tenemos $x = 1/y$, y en consecuencia

$$e^z = e^{1/y}(\cos y + i \sin y).$$

Como $y \rightarrow \pm \infty$, $\lim e^z$ no existe ni se hace infinito.

10.37. Problema. Demostrar que la parte imaginaria de

$$\log \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

es $\pi/2$ o $-\pi/2$ ya sea que $0 < \theta < \pi$ o $\pi < \theta < 2\pi$.



Ya que

$$\log z = \log |z| + i \operatorname{arc} z,$$

vemos que la parte imaginaria de $\log \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}$ es

$$\operatorname{arc} \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

Ahora,

$$\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = i \cot \frac{\theta}{2} \text{ por el Art. 10.34.}$$

Pero,

$$\operatorname{arc} (i \cot \theta/2) = \pm \pi/2$$

ya sea que $\cot \theta/2 \geq 0$, o lo que es igual, ya sea que $0 < \theta < \pi$ o $\pi < \theta < 2\pi$.

10.38. Alternativa para el Art. 8.77. Sea

$$f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + i v(r, \theta)$$

cualquier función analítica. Entonces, haciendo $z = re^{i\theta}$ (Art. 10.05), tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = f'(z) i r e^{i\theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial \theta},$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial r} = f'(z) e^{i\theta} = \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{i}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r},$$

de lo cual

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r},$$

las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar.

10.39. Nota. $|A^B| \neq |A|^{|B|}$ en general. Porque $|2^{-1}| = \frac{1}{2}$ y $|2|^{|-1|} = 2$.

CAPITULO 11

Integración

INTEGRALES LINEALES COMPLEJAS

11.01. Definición. Sea $f(z)$ una función de simple valoración de z definida en un dominio D , y sea C una curva regular en D con sus puntos extremos en $z = a$ y $z = b$. Sea

$$z_0 = a, \quad z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad \dots, \quad z_n = b$$

puntos sucesivos a lo largo de C , y sea z'_m un punto de C entre z_{m+1} y z_m . Establezcamos

$$\Delta z_m = z_{m+1} - z_m$$

y consideremos la suma

$$\sum_{m=0}^{n-1} f(z'_m) \Delta z_m.$$

Entonces si existe

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max |\Delta z_m| \rightarrow 0}} \sum_{m=0}^{n-1} f(z'_m) \Delta z_m$$

la denotaremos por

$$\int_a^b f(z) dz,$$

y se la conocerá como la *integral lineal compleja de $f(z)$ de a hasta b a lo largo de C* .

11.02. Teorema. Si $f(z)$ es continua en un dominio D y si C es una curva regular en D , entonces

$$\int_a^b f(z) dz$$

existe y es igual a

$$\int_{(a'a'')}^{(b'b'')}_C (u dx - v dy + iu dy + iv dx), \quad (1)$$

donde

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y), \\ a &= a' + ia'', \\ b &= b' + ib''. \end{aligned}$$

Demostración: Tenemos

$$f(z'_m)\Delta z_m = \{u(x'_m, y'_m) + iv(x'_m, y'_m)\}(\Delta x_m + i\Delta y_m).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} f(z'_m)\Delta z_m &= \sum_{m=0}^{n-1} \{u(x'_m, y'_m)\Delta x_m - v(x'_m, y'_m)\Delta y_m\} \\ &+ i \sum_{m=0}^{n-1} \{u(x'_m, y'_m)\Delta y_m + v(x'_m, y'_m)\Delta x_m\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Ahora, como $f(z)$ es continua en D , también u y v lo son en D . En consecuencia, pasando al límite cuando $n \rightarrow \infty$, $\max |\Delta z_m| \rightarrow 0$, los límites del miembro de la derecha de (2) existen, por el Art. 8.90. En consecuencia, el límite del miembro de la izquierda existe y debe estar dado por (1).

11.03. Definición. Si Δs_m es el arco de C entre z_m y z_{m+1} , y si

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta s_m \rightarrow 0}} \sum_{m=0}^{n-1} f(z'_m)\Delta s_m$$

existe, al límite se le denotará por

$$\int_C f(z) ds.$$

11.04. Teorema. Si $f(z)$ es continua en un dominio D , y si C es una curva regular en D , entonces

$$\int_C f(z) ds$$

existe y es igual a

$$\int_C u(x, y) ds + i \int_C v(x, y) ds.$$

Demostración: Semejante a la del Art. 11.02.

$$\mathbf{11.05. Teorema.} \quad \int_a^b f(z) dz = - \int_b^a f(z) dz.$$

$$\mathbf{11.06. Teorema.} \quad \int_a^b f(z) dz = \int_a^c f(z) dz + \int_c^b f(z) dz.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{11.07. Teorema.} \quad \int_a^b \{a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z)\} dz \\ = a_1 \int_a^b f_1(z) dz + a_2 \int_a^b f_2(z) dz. \end{aligned}$$

$$\mathbf{11.08. Teorema.} \quad \left| \int_a^b f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(z)| ds.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=0}^{n-1} f(z'_m)\Delta z_m \right| &\leq \sum_{m=0}^{n-1} |f(z'_m)| |\Delta z_m| \\ &\leq \sum_{m=0}^{n-1} |f(z'_m)| \Delta s_m, \end{aligned}$$

porque $|\Delta z_m|$ es la longitud de la cuerda desde z_m hasta z_{m+1} , y esto es $\leq \Delta s_m$. Podemos tomar ahora el límite y obtener el teorema.

11.09. Ejemplos. (1) Evaluar $\int_0^{1+i} x dz$, donde

- (a) C es una línea recta desde $z = 0$ hasta $z = 1 + i$,
- (b) C es una línea quebrada desde $z = 0$ hasta $z = 1$, y desde $z = 1$ hasta $z = 1 + i$.

(a) $f(z) = x$ es ciertamente continua en un dominio conteniendo a C , y C es una curva regular. Las ecuaciones paramétricas de C , donde el parámetro es la longitud del arco s , son

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} s, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} s.$$

En consecuencia, por el Art. 11.02,

$$\begin{aligned} \int_0^{1+i} x dz &= \int_{(0,0)}^{(1,1)}_C (x dx + ix dy) \\ &= \frac{1+i}{2} \int_0^{\sqrt{2}} s ds \\ &= \frac{1+i}{4} s^2 \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{2}. \quad \text{Respuesta.} \end{aligned}$$

(b) Otra vez, $f(z)$ es continua en algún dominio que contiene a C , y C es regular (véase Fig. 11.1). En consecuencia

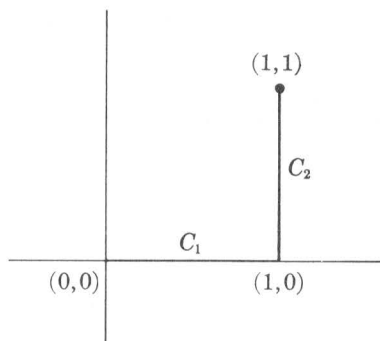


FIGURA 11.1

$$\begin{aligned} \int_0^{1+i} x \, dz &= \int_{C_1}^1 x \, dz + \int_{C_2}^{1+i} x \, dz \\ &= \int_{(0,0)}^{(1,0)} (x \, dx + ix \, dy) + \int_{(1,0)}^{(1,1)} (x \, dx + ix \, dy) \\ &= \int_0^1 s \, ds + \int_0^1 i \, ds \\ &= \frac{1}{2} + i. \quad \text{Respuesta.} \end{aligned}$$

(2) Evaluar $\int_{-i}^i |z| \, dz$, donde

- (a) C es una línea recta desde $z = -i$ hasta $z = i$,
- (b) C es la mitad derecha de un círculo $|z| = 1$,
- (c) C es la mitad izquierda de un círculo $|z| = 1$.

(a) Las condiciones del Art. 11.02 se satisfacen. Las ecuaciones paramétricas de C en función de la longitud de arco son

$$x = 0, \quad y = s - 1, \quad 0 \leq s \leq 2.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \int_{-i}^i |z| \, dz &= \int_{(0,-1)}^{(0,1)} (x^2 + y^2)^{1/2} \, dx + i(x^2 + y^2)^{1/2} \, dy \\ &= \int_0^1 i(1-s) \, ds + \int_1^2 i(s-1) \, ds = i. \quad \text{Respuesta.} \end{aligned}$$

(b) Una vez más, las condiciones del Art. 11.02 se satisfacen. Las ecuaciones paramétricas de C en función de la longitud de arco son (véase Fig. 11.2)

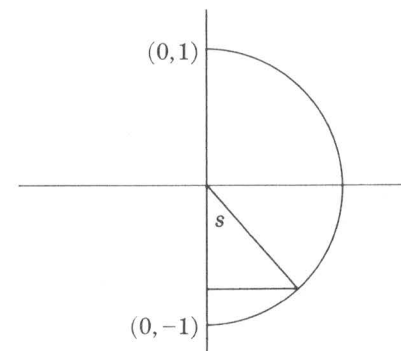


FIGURA 11.2

$$x = \sin s, \quad y = -\cos s.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \int_{-i}^i |z| \, dz &= \int_0^\pi \cos s \, ds + i \sin s \, ds \\ &= (\sin s - i \cos s) \Big|_0^\pi \\ &= 2i. \quad \text{Respuesta.} \end{aligned}$$

(c) Aquí

$$x = -\sin s, \quad y = -\cos s.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \int_{-i}^i |z| \, dz &= \int_0^\pi -\cos s \, ds + i \sin s \, ds \\ &= (-\sin s - i \cos s) \Big|_0^\pi \\ &= 2i. \quad \text{Respuesta.} \end{aligned}$$

(3) Evaluar $\int_{-i}^i z \, dz$, donde

- (a) C es una línea recta desde $z = -i$ hasta $z = i$,
- (b) C es la mitad derecha del círculo $|z| = 1$,
- (c) C es la mitad izquierda del círculo $|z| = 1$.

(a) Como en (a) del Ej. (2), encontramos

$$\begin{aligned}\int_{-i}^i z dz &= \int_{(0,-1)}^{(0,1)} x dx - y dy + ix dy + iy dx \\ &= \int_0^2 -(s-1) ds \\ &= 0. \quad \text{Respuesta.}\end{aligned}$$

(b) Como en (b) del Ej. (2), encontramos

$$\begin{aligned}\int_{-i}^i z dz &= \int_0^\pi \operatorname{sen} s \cos s ds + \cos s \operatorname{sen} s ds \\ &\quad + \int_0^\pi i \operatorname{sen}^2 s ds - i \cos^2 s ds \\ &= i \left\{ \frac{s}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2s}{4} \right\} - i \left\{ \frac{s}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2s}{4} \right\} \Big|_0^\pi \\ &= -\frac{i \operatorname{sen} 2s}{2} \Big|_0^\pi \\ &= 0. \quad \text{Respuesta.}\end{aligned}$$

(c) Como en (c) del Ej. (2), encontramos

$$\begin{aligned}\int_{-i}^i z dz &= \int_0^\pi \operatorname{sen} s \cos s ds + \cos s \operatorname{sen} s ds \\ &\quad + \int_0^\pi -i \operatorname{sen}^2 s ds + i \cos^2 s ds \\ &= -i \left\{ \frac{s}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2s}{4} \right\} + i \left\{ \frac{s}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2s}{4} \right\} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{i \operatorname{sen} 2s}{2} \Big|_0^\pi \\ &= 0. \quad \text{Respuesta.}\end{aligned}$$

Nota: Los Ejs. (1) y (2) demuestran que la continuidad de $f(z)$ no es suficiente para garantizar un resultado independiente de la trayectoria C .

(4) Evaluar $\int_C dz/z$, donde C es el círculo con centro en el

origen y radio r . Aquí tenemos, por C ,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}\int_C \frac{dz}{z} &= \int_C \frac{dx + i dy}{x + iy} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-r \operatorname{sen} \theta + ri \cos \theta) d\theta}{r \cos \theta + ri \operatorname{sen} \theta} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{rie^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} i d\theta \\ &= 2\pi i. \quad \text{Respuesta.}\end{aligned}$$

TEOREMA DE CAUCHY

11.10. Teorema de Cauchy. Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conectado D , y si C es una curva regular cerrada en D , entonces

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Demostración: Por el Art. 11.02,

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy.$$

Ahora, para cada una de las integrales de la derecha, se mantienen las condiciones del Art. 8.91, porque

- (1) como $f(z)$ es analítica en D , u y v son de clase C^1 en D ;
- (2) D es simplemente conectada;
- (3) C es una curva regular cerrada en D ;
- (4) como $f(z)$ es analítica en D , las ecuaciones de Cauchy-Riemann se mantienen en D , o lo que es lo mismo,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

En consecuencia, por el Art. 8.91, el lado derecho es igual a cero. Por lo tanto, el lado izquierdo debe ser igual a cero.

11.11. Teorema. Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conectado D , y si C es una curva regular arbitraria en D conectando los puntos a y z de D , entonces

$$F(z) = \int_a^z f(z) dz$$

es independiente de C , y en consecuencia es una función de simple valuación de z . También, $F(z)$ es analítica en D y $F'(z) = f(z)$.

Demostración:

$$\int_a^z f(z) dz = \int_{(a', a'')}^{(x, y)} u dx - v dy + i \int_{(a', a'')}^{(x, y)} v dx + u dy.$$

Ahora, para cada una de las integrales de la derecha, se mantienen las condiciones del Art. 8.92, porque

- (1) Como $f(z)$ es analítica en D , u y v son de clase C^1 en D ;
- (2) D es simplemente conectada;
- (3) C es una curva regular en D ;
- (4) las ecuaciones de Cauchy-Riemann se mantienen en D .

En consecuencia, por el Art. 8.92, el lado derecho es independiente de la trayectoria C que une (a', a'') con (x, y) . Lo mismo es entonces cierto para el lado izquierdo.

Ahora hacemos

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y).$$

Entonces

$$U = \int_{(a', a'')}^{(x, y)} u dx - v dy \quad \text{y} \quad V = \int_{(a', a'')}^{(x, y)} v dx + u dy.$$

Pero, por el Art. 8.92,

$$U_x = u, \quad U_y = -v, \quad V_x = v, \quad V_y = u.$$

Por lo tanto

$$U_x = V_y \quad \text{y} \quad U_y = -V_x.$$

En consecuencia, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se mantienen para U y V . También, U_x, U_y, V_x, V_y son continuas siempre que u y v sean continuas. Por lo tanto, $F(z)$ es analítica en D . Finalmente, como $F(z)$ es analítica,

$$\begin{aligned} F'(z) &= U_x + iV_x \\ &= u + iv \\ &= f(z). \end{aligned}$$

$$\mathbf{11.12. Teorema} \quad \int_a^b f(z) dz = \int_{t_1}^{t_2} f\{z(t)\} z'(t) dt, \quad t \text{ real.}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z) dz &= \int_{(a', a'')}^{(b', b'')} u dx - v dy + iu dy + iv dx \\ &= \int_{(a', a'')}^{(b', b'')} (u + iv)(dx + i dy) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \{u(t) + iv(t)\} \{\varphi'(t) + i\psi'(t)\} dt \\ &\quad \text{donde } x = \varphi(t), y = \psi(t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} f\{z(t)\} z'(t) dt. \end{aligned}$$

11.13. Definición. Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conectado D , entonces $F(z)$ es una *integral indefinida* de $f(z)$, si y sólo si $F'(z) = f(z)$ en D .

11.14. Teorema. Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conectado D , y si $F(z)$ es una integral indefinida de $f(z)$, entonces $F(z)$ es analítica en D .

11.15. Teorema. Existen integrales indefinidas de $f(z)$ analítica.

Demostración: Podemos construir una como sigue. Sea a cualquier punto en el dominio D en el que es analítica. Formamos

$$F(z) = \int_a^z f(z) dz.$$

Esta es simplemente valuación, por el Art. 11.11. También, por el Art. 11.11,

$$F'(z) = f(z).$$

En consecuencia, $F(z)$ es una integral indefinida de $f(z)$.

11.16. Teorema. Toda integral indefinida de $f(z) \equiv 0$ es constante.

Demostración: Sea $F(z)$ una integral indefinida de $f(z)$, y sea $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$. Entonces, como $F(z)$ es analítica (Art. 11.14),

$$F'(z) = f(z) = U_x + iV_x = V_y - iU_y \equiv 0.$$

Por lo tanto

$$U_x = U_y = V_x = V_y \equiv 0.$$

En consecuencia

$$U = \text{constante} \quad \text{y} \quad V = \text{constante}.$$

Por lo tanto

$$F(z) = \text{constante}.$$

11.17. Teorema. Dos integrales indefinidas de $f(z)$ difieren en una constante.

Demostración: Sean $F_1(z)$ y $F_2(z)$ dos integrales indefinidas de $f(z)$, y sea

$$\varphi(z) = F_1(z) - F_2(z).$$

Entonces

$$F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) = 0 = \varphi'(z).$$

En consecuencia, por el Art. 11.16, $\varphi(z) = \text{constante}$. De ahí el teorema.

11.18. Teorema. Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conectado D , entonces $F(z) = \int_a^z f(z) dz + C$, donde a está en D , y es una integral indefinida arbitraria de $f(z)$.

Demostración: Por los Arts. 11.15 y 11.17.

11.19. Teorema. Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conectado D conteniendo a y b , y si $F(z)$ es una integral indefinida de $f(z)$, entonces

$$\int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a).$$

Demostración: Por el Art. 11.18.

$$F(z) = \int_a^z f(z) dz + C.$$

En consecuencia

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(z) dz.$$

11.20. Ejercicio. Evaluar $\int_0^{a+bi} z dz$ primero directamente a lo largo de una línea y entonces por el uso de la integral indefinida.

(a) Como $f(z) = z$ es analítica en todas partes, el valor de

$$\int_0^{a+bi} z dz$$

es independiente de la trayectoria de integración. Escogemos, entonces, la línea

$$y = \frac{b}{a}x.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{a+bi} z dz &= \int_{(0,0)}^{(a,b)} x dx - y dy + ix dy + iy dx \\ &= \int_0^a x dx - \int_0^b y dy + \frac{ai}{b} \int_0^b y dy + \frac{bi}{a} \int_0^a x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^a - \frac{y^2}{2} \Big|_0^b + i \frac{ay^2}{2b} \Big|_0^b + i \frac{bx^2}{2a} \Big|_0^a \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + iab \\ &= \frac{(a+bi)^2}{2}. \quad \text{Respuesta.} \end{aligned}$$

(b) $z^2/2$ es una integral indefinida de z . En consecuencia

$$\int_0^{a+bi} z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_0^{(a+bi)} = \frac{(a+bi)^2}{2}. \quad \text{Respuesta.}$$

DOMINIOS ANULARES

11.21. Definición. Sean D_1 y D_2 dos dominios simplemente conectados tales que D_2 está contenido en D_1 , y las fronteras de D_1 y D_2 no tienen ningún punto en común. Entonces el dominio formado por $D_1 - (D_2 + \text{sus fronteras})$ es llamado un *dominio anular*.

11.22. Teorema. Si C_1 y C_2 son dos curvas cerradas regulares simples en un dominio anular D , ambas incluyendo puntos frontera de D , y si $f(z)$ es analítica en D , entonces

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

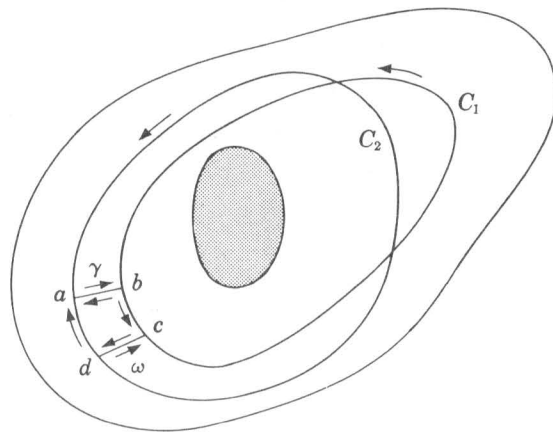


FIGURA 11.3

Demostración: Consideremos las curvas C_1 y C_2 en la Fig. 11.3. Tomemos dos puntos b y c sobre C_1 y dos puntos a y d sobre C_2 . Unamos a con b y d con c por medio de las curvas regulares γ y ω , respectivamente, y de tal modo que la curva cerrada $C_1|_b^c - \omega - C_2|_d^a + \gamma$ esté en un dominio simplemente conexo contenido en D . Entonces, por el Teorema de Cauchy,

$$\int_{\underbrace{C_1}_b^c} f(z) dz + \int_{\underbrace{\omega}_c^d} f(z) dz + \int_{\underbrace{C_2}_d^a} f(z) dz + \int_{\underbrace{\gamma}_a^b} f(z) dz = 0. \quad (1)$$

Pero también, por el Teorema de Cauchy,

$$\int_{\underbrace{C_1}_c^b} f(z) dz + \int_{\underbrace{\gamma}_b^a} f(z) dz + \int_{\underbrace{C_2}_a^d} f(z) dz + \int_{\underbrace{\omega}_d^c} f(z) dz = 0. \quad (2)$$

Sumando (1) y (2), encontramos

$$\int_{\underbrace{C_1}} f(z) dz + \int_{\underbrace{C_2}} f(z) dz = 0.$$

Esto demuestra el teorema.

11.23. Nota. El teorema anterior —y muchos subsiguientes— puede generalizarse como sigue. Sea D cualquier dominio, simple o múltiplemente conexo. Dos curvas dirigidas regulares C_1 y C_2 en D , uniendo dos puntos a y b de D , serán llamadas *equivalentes* si una puede ser deformada topológicamente y con-

vertida en la otra en D . A dos curvas cerradas dirigidas regulares en D se les llamará *equivalentes* si una de ellas puede ser convertida en la otra deformándola topológicamente en D . Bajo estas definiciones podemos generalizar los Arts. 11.11 y 11.22 a:

(1) Si $f(z)$ es analítica en un dominio D , y si C_1 y C_2 son curvas regulares equivalentes uniendo $z = a$ con $z = b$ de D , entonces $\int_{C_1}^b f(z) dz = \int_{C_2}^b f(z) dz$.

(2) Si $f(z)$ es analítica en un dominio D , y si C_1 y C_2 son curvas cerradas regulares equivalentes en D , entonces $\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$.

11.24. Teorema. $\int_C \frac{dz}{z - a} = 2\pi i$, donde C es cualquier curva

cerrada regular simple alrededor del punto $z = a$.

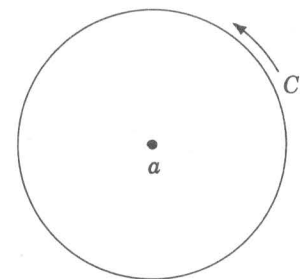


FIGURA 11.4

Demostración: Sea C' el círculo unitario alrededor de $z = a$ (ver Fig. 11.4). Entonces las ecuaciones paramétricas de C' en función de la longitud de arco s son

$$x - a' = \cos s,$$

$$y - a'' = \sin s,$$

donde $a = a' + ia''$. Ahora, sobre C' tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - a} &= \frac{1}{(x - a') + i(y - a'')} \\ &= \frac{x - a'}{(x - a')^2 + (y - a'')^2} - i \frac{y - a''}{(x - a')^2 + (y - a'')^2} \\ &= u + iv, \text{ digamos.} \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}\int_{C'} \frac{dz}{z-a} &= \int_{C'} u dx - v dy + i \int_{C'} u dy + v dx \\ &= \int_0^{2\pi} -\cos s \sin s ds + \sin s \cos s ds \\ &\quad + i \int_0^{2\pi} \cos^2 s ds + \sin^2 s ds \\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

Pero, por el Art. 11.22,

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_{C'} \frac{dz}{z-a}.$$

En consecuencia el teorema.

Alternativa: Generalicemos y encontremos el valor de

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^m}.$$

Si z está en C' , tenemos

$$z-a = e^{i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{C'} \frac{dz}{(z-a)^m} &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} i d\theta}{e^{im\theta}} \\ &= \int_0^{2\pi} ie^{(1-m)i\theta} d\theta.\end{aligned}\quad (1)$$

Si $m = 1$, entonces el lado izquierdo de (1) se reduce a $2\pi i$, lo cual es el teorema. Si $m \neq 1$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} ie^{(1-m)i\theta} d\theta &= \frac{ie^{(1-m)i\theta}}{(1-m)i} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{e^{(1-m)2\pi i}}{(m-1)} - \frac{1}{(m-1)} \\ &= \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m-1} \\ &= 0,\end{aligned}$$

como

$$e^{(1-m)2\pi i} = \cos \{2(1-m)\pi\} + i \sin \{2(1-m)\pi\} = +1.$$

11.25. Teorema. Sea $f(z)$ analítica en un dominio anular D , a y z son dos puntos cualesquiera en D , γ es una línea quebrada dando como resultado que D sea simplemente conectado, C es cualquier curva regular que une a con z y que corta γ , m veces positivamente y n veces negativamente, C' es cualquier curva regular que une a con z pero que no corta a γ , y Ω es una curva cerrada regular simple en D que incluye los puntos frontera de D . Entonces

$$F(z) = F^*(z) + (m-n)\omega,$$

donde

$$F(z) = \int_a^z f(z) dz, \quad F^*(z) = \int_{C'}^z f(z) dz, \quad \omega = \int_{\Omega} f(z) dz.$$

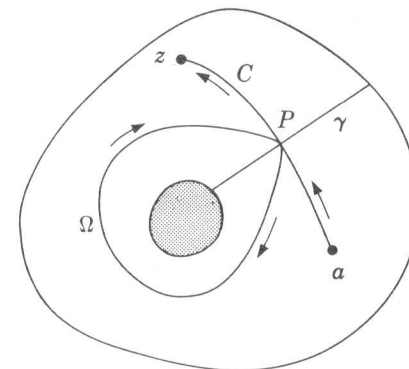


FIGURA 11.5

Demostración: Consideremos el caso especial en el que C corta a γ una vez, positivamente (ver Fig. 11.5). La ampliación del caso general será entonces obvia.

Supongamos que C , entonces, corta a γ en P , y dibujemos la curva Ω que pasa por P . Sea C' esta curva

$$\widehat{aP} + \Omega + \widehat{Pz}.$$

Entonces

$$\int_{C'}^z f(z) dz = \int_a^z f(z) dz - \int_{\Omega} f(z) dz.$$

Esto, aunado a los Arts. 11.10 y 11.11, da el teorema.

Notas: (1) ω es conocida como el *módulo de periodicidad*.

(2) Este teorema puede también ser generalizado para un dominio D con n regiones interiores $D_1, \dots, D_n$ suprimidas de éste. Así (véase Fig. 11.6).

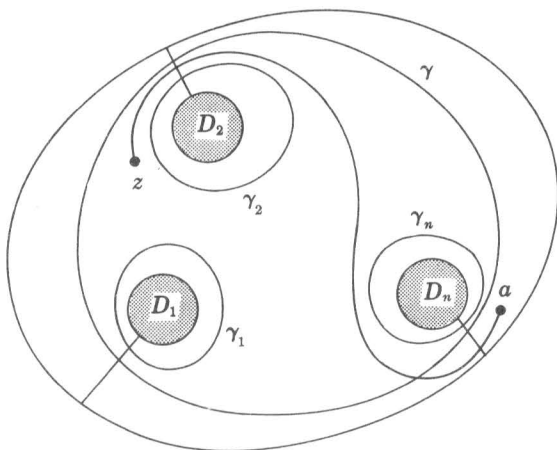


FIGURA 11.6

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz,$$

por una ampliación del Teorema de Cauchy. Ahora establecemos

$$\int_{\gamma_l} f(z) dz = \omega_l, \quad l = 1, \dots, n.$$

Entonces, si C' es cualquier curva que une a con z pero que no cruza un corte, y si

$$F(z) = \int_a^z f(z) dz, \quad F^*(z) = \int_a^z f(z) dz,$$

tenemos

$$F(z) = F^*(z) + k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_n\omega_n,$$

donde, usando la notación previa,

$$k_l = m_l - n_l.$$

FORMULA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY

11.26. Fórmula de la integral de Cauchy. Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conectado D , y si C es cualquier curva cerrada regular simple en D alrededor del punto $z = a$, entonces

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

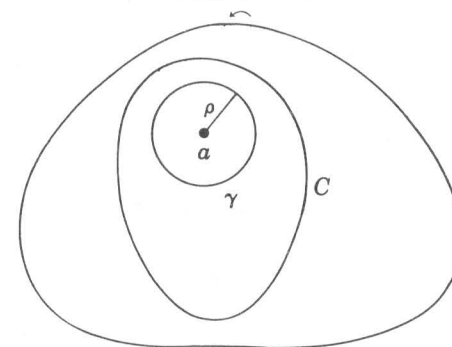


FIGURA 11.7

Demostración: Como se indica en la Fig. 11.7, sea γ un círculo en el interior de C con centro en a y de radio ρ . Ahora,

$$\frac{f(z)}{z - a}$$

es ciertamente analítica en todas partes en D excepto en $z = a$. Por lo tanto, por el Art. 11.22,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz + \int_{\gamma} \frac{f(a)}{z - a} dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz + f(a) 2\pi i \quad \text{por el Art. 11.24} \quad (1) \end{aligned}$$

Ahora, como $f(z)$ es continua en $z = a$, para cualquier $\epsilon > 0$ dada existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f(a)| < \epsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |z - a| < \delta.$$

En consecuencia, escogiendo una γ tal que $\rho < \delta$, tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz \right| &\leq \int_{\gamma} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|} ds \quad \text{por el Art. 11.08} \\ &< \int_{\gamma} \frac{\epsilon}{\rho} ds \\ &= \frac{\epsilon}{\rho} 2\pi\rho \\ &= 2\pi\epsilon. \end{aligned} \quad (2)$$

Como el lado derecho de (2) puede hacerse menor que cualquier valor positivo dado (tomando ρ de γ suficientemente pequeño), se sigue que el lado izquierdo debe ser 0. Llevando esto a (1), obtenemos el teorema.

Notas: (1) Reemplazando a por z y z por t , tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t - z} dt.$$

(2) La fórmula de la integral de Cauchy expresa el valor de $f(z)$ en cualquier punto dentro de C en función de sus valores en C .

11.27. Teorema. Si $f(z)$ es continua sobre una curva regular, entonces está circunscrita ahí.

Demostración: Sea

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

y

$$C: x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad 0 \leq s \leq l,$$

donde φ y ψ son continuas en $[0, l]$. Entonces

$$u(x, y) = u\{\varphi(s), \psi(s)\}$$

es una función continua de s en el intervalo cerrado $[0, l]$. En consecuencia, por el Art. 8.22, existe una $M_1 > 0$ tal que sobre C

$$|u| < M_1.$$

De una manera semejante, existe una $M_2 > 0$ tal que sobre C

$$|v| < M_2.$$

En consecuencia

$$|f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2} < \sqrt{M_1^2 + M_2^2}.$$

En consecuencia el teorema.

11.28. Teorema. Si $f(z)$ es continua en una región cerrada R , entonces está circunscrita ahí.

11.29. Teorema. Si C es una curva regular y z_0 es un punto no sobre C , entonces existe una $\delta > 0$ tal que la distancia desde z_0 hasta los puntos sobre C es siempre mayor que δ .

Demostración: Por la definición de curva regular, C puede representarse paramétricamente como

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad 0 \leq s \leq l,$$

donde s es la longitud de arco y l es la longitud total de la curva, y donde φ y ψ son continuas en $[0, l]$. Ahora sean (a, b) las coordenadas cartesianas de z_0 . Entonces la distancia desde z_0 hasta un punto arbitrario de C está dada por

$$d = +[\{\varphi(s) - a\}^2 + \{\psi(s) - b\}^2]^{1/2}.$$

Ahora, esta función es ciertamente continua y mayor que 0 en $[0, l]$. En consecuencia, por el Art. 8.37, existe una $\delta > 0$ tal que $d > \delta$ para todos los puntos de la curva C .

11.30. Teorema. Si $f(z)$ es analítica en un dominio D , entonces $f'(z)$ es analítica en D .

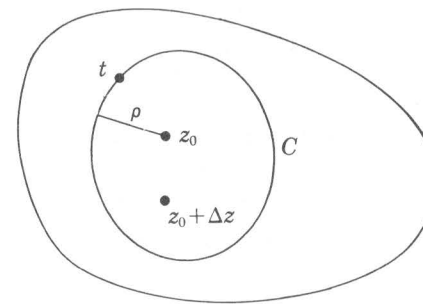


FIGURA 11.8

Demostración: Como se indica en la Fig. 11.8, sea z_0 cualquier punto en D , y sea C cualquier curva cerrada regular simple en D y alrededor de $z = z_0$. Ahora, por la fórmula de la integral de Cauchy (Art. 11.26),

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t - z_0} dt.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{\Delta z} \left\{ \frac{1}{t - z_0 - \Delta z} - \frac{1}{t - z_0} \right\} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{(t - z_0 - \Delta z)(t - z_0)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) \Delta z dt}{(t - z_0)^2(t - z_0 - \Delta z)}. \quad (1)\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) \Delta z dt}{(t - z_0)^2(t - z_0 - \Delta z)} \right| &\leq \frac{|\Delta z|}{2\pi} \int_C \frac{|f(t)| ds}{|t - z_0|^2 |t - z_0 - \Delta z|} \\ &< \frac{|\Delta z|}{2\pi} \int_C \frac{M ds}{|t - z_0|^2 \{ |t - z_0| - |\Delta z| \}},\end{aligned}$$

(donde $M > |f(t)|$ para cualquier punto sobre C ; M debe existir por el Art. 11.27)

$$\begin{aligned}&\leq \frac{|\Delta z|}{2\pi} \int_C \frac{M ds}{\rho^2(\rho - |\Delta z|)}, \\ &\text{(donde } \rho \text{ es el menor valor de } |t - z_0| \text{ sobre } C) \\ &= \frac{|\Delta z| M l}{2\pi \rho^2(\rho - |\Delta z|)}, \quad (2)\end{aligned}$$

donde l es la longitud de C . Ahora, cuando $\Delta z \rightarrow 0$, el lado derecho de (2) también $\rightarrow 0$. En consecuencia el lado izquierdo debe $\rightarrow 0$, y en el límite tenemos, de (1),

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^2}. \quad (3)$$

Por un proceso semejante (o por el Art. 11.31), encontramos

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^3},$$

de lo cual $f'(z)$ tiene una derivada en $z = z_0$, o lo que es lo mismo, $f'(z)$ es analítica en $z = z_0$. Esto demuestra el teorema.

11.31. Teorema. Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conectado D , y si C es cualquier curva cerrada regular simple en D alrededor del punto $z = z_0$, entonces

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{n+1}}.$$

Demostración: Supongamos que el teorema es cierto cuando $n = k$, y entonces sobre esta suposición demostremos que es cierto para $n = k + 1$. Esto es, supongamos

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{k+1}}. \quad (1)$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f^{(k)}(z_0)}{\Delta z} &= \frac{f^{(k)}(z_0 + \Delta z) - f^{(k)}(z_0)}{\Delta z} \\ &= \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{\Delta z} \left\{ \frac{1}{(t - z_0 - \Delta z)^{k+1}} - \frac{1}{(t - z_0)^{k+1}} \right\} dt \\ &= \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{b} \frac{a^{k+1} - (a - b)^{k+1}}{a^{k+1}(a - b)^{k+1}} dt,\end{aligned}$$

donde $a = t - z_0$ y $b = \Delta z$. En consecuencia

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f^{(k)}(z_0)}{\Delta z} &= \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{k+2}} \\ &= \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \left\{ \frac{f(t)}{(k+1)b} \cdot \frac{a^{k+1} - (a - b)^{k+1}}{a^{k+1}(a - b)^{k+1}} - \frac{f(t)}{a^{k+2}} \right\} dt \\ &= \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) \{ a^{k+2} - a(a - b)^{k+1} - b(k+1)(a - b)^{k+1} \}}{b(k+1)a^{k+2}(a - b)^{k+1}} dt \\ &= \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) \{ A_1 a^k b + A_2 a^{k-1} b^2 + \dots \}}{a^{k+2}(a - b)^{k+1}} dt.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\left| \frac{\Delta f^{(k)}(z_0)}{\Delta z} - \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{k+2}} \right| &\leq \frac{(k+1)!}{2\pi} \int_C \frac{|f(t)| \{ |A_1| |a|^k |b| + \dots \}}{|a|^{k+2} |a - b|^{k+1}} ds \\ &< \frac{(k+1)! M \{ |A_1| \rho^k |\Delta z| + \dots \}}{\rho^{k+2} \{ \rho - |\Delta z| \}^{k+1}}, \quad (2)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} M &> |f(t)| \text{ para puntos sobre } C, \\ P &> |t - z_0| \text{ para puntos sobre } C, \\ \rho &< |t - z_0| \text{ para puntos sobre } C, \\ l &= \text{longitud de } C. \end{aligned}$$

Ahora, cuando $\Delta z \rightarrow 0$, el miembro de la derecha de (2) también $\rightarrow 0$. En consecuencia el miembro de la izquierda $\rightarrow 0$. En consecuencia tenemos, en el límite,

$$f^{(k+1)}(z_0) = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{k+2}}.$$

Pero, por (3) del Art. 11.30, (1) se mantiene para $k = 1$. En consecuencia, por inducción matemática, (1) se mantiene para toda k , y el teorema está demostrado.

11.32. Teorema. Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conectado D , entonces $f(z)$ posee derivadas de todos los órdenes en D .

Demostración: Por el Art. 11.30.

11.33. Teorema. Si $v(x, y)$ es conjugada de $u(x, y)$ en un dominio simplemente conectado D , entonces u y v son de clase C^∞ en D .

Demostración: Formamos la función

$$f(z) = u + iv.$$

Entonces $f(z)$ y $f'(z)$ son analíticas en D . Pero

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} v_x &\text{ es conjugada de } u_x, \\ u_y &\text{ es conjugada de } -v_y. \end{aligned}$$

En consecuencia u_x, u_y, v_x y v_y son de clase C^1 . En consecuencia $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, v_{xx}, v_{xy}$ y v_{yy} existen y son continuas. Por lo tanto u y v son de clase C^2 en D .

Ahora,

$$\begin{aligned} f''(z) &= u_{xx} + iv_{xx} \\ &= -iu_{yx} + v_{yx} \\ &= -u_{yy} - iv_{yy}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

11.34. Teorema de Morera (un recíproco del teorema de Cauchy). Si $f(z)$ es continua en un dominio simplemente conectado D , y si $\int_C f(z) dz = 0$ para todas las curvas cerradas regulares C en D , entonces $f(z)$ es analítica en D .

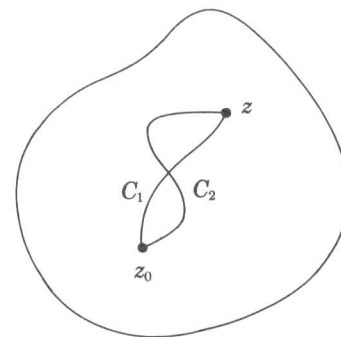


FIGURA 11.9

Demostración: Como se indica en la Fig. 11.9, sean z_0 y z dos puntos cualesquiera en D , y sean C_1 y C_2 dos curvas regulares cualesquiera que unen z_0 con z . Entonces, por hipótesis,

$$\int_{C_1}^z f(z) dz + \int_{C_2}^{z_0} f(z) dz = 0,$$

de lo cual

$$\int_{C_1}^z f(z) dz = \int_{C_2}^z f(z) dz.$$

Esto es, la función,

$$F(z) = \int_{C_1}^z f(z) dz$$

es independiente de la trayectoria C , y en consecuencia es una función de simple valuación de z .

Ahora, si l es la línea recta que une z_0 con $z_0 + \Delta z$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F(z_0)}{\Delta z} &= \frac{F(z_0 + \Delta z) - F(z_0)}{\Delta z} \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} f(t) dt \quad \text{por el Art. 11.19.} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left| \frac{\Delta F(z_0)}{\Delta z} - f(z_0) \right| = \left| \frac{1}{\Delta z} \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \{f(t) - f(z_0)\} dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} |f(t) - f(z_0)| ds.$$

Pero, como $f(z)$ es continua en D , existe una $\delta > 0$ tal que, para una $\varepsilon > 0$ dada,

$$|f(t) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad |t - z_0| < \delta.$$

Tomemos entonces

$$|\Delta z| (=|t - z_0|) < \delta.$$

Entonces

$$\left| \frac{\Delta F(z_0)}{\Delta z} - f(z_0) \right| < \frac{1}{|\Delta z|} \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \varepsilon ds$$

$$= \varepsilon,$$

para $\int_l ds = |\Delta z|$, como l es la línea recta desde z_0 hasta $z_0 + \Delta z$. Por lo tanto

$$F'(z_0) = f(z_0).$$

Así $F(z)$ es analítica en D . Entonces también $F'(z)$ es analítica en D (Art. 11.30). Esto es, $f(z)$ es analítica en D .

Nota: El teorema y la demostración se mantienen aún si restringimos el tipo de curvas regulares cerradas, C , a polígonos convexos.

11.35. Teorema de Liouville. Si $f(z)$ es analítica para toda z finita, y si $|f(z)| < M$ para toda z , entonces $f(z)$ es constante.

Demostración: Sea z_0 cualquier punto en el plano; demostraremos que $f(z_0) = f(0)$. Como se indica en la Fig. 11.10, dibujamos un círculo γ con centro en 0 y de radio R de tal modo que z_0 cae dentro de γ . Ahora, por la fórmula de la integral de Cauchy,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t - z_0}, \quad f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t}.$$

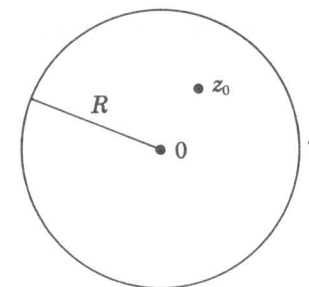


FIGURA 11.10

Por lo tanto

$$f(z_0) - f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(t) \left\{ \frac{1}{t - z_0} - \frac{1}{t} \right\} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) z_0 dt}{t(t - z_0)}.$$

En consecuencia

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(t)| |z_0| ds}{|t| |t - z_0|} \quad \text{por el Art. 11.08}$$

$$< \frac{1}{2\pi} |z_0| M \int_{\gamma} \frac{ds}{|t| |t - z_0|}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{|z_0| M}{R(R - |z_0|)} 2\pi R$$

$$\text{por } |t - z_0| \geq |t| - |z_0| = R - |z_0|$$

$$= \frac{M |z_0|}{R - |z_0|}. \quad (1)$$

Pero podemos tomar R tan grande como queramos, en cuyo caso el lado derecho de (1) puede hacerse menor que cualquier número positivo asignado previamente. En consecuencia, el lado izquierdo de (1) debe ser igual a 0. Esto es,

$$f(z_0) = f(0), \text{ una constante.}$$

11.36. Teorema fundamental de álgebra. Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene por lo menos un cero.

Demostración: Sea el polinomio

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0, n \geq 1.$$

Supongamos que $f(z)$ no tiene cero. Entonces $1/f(z)$ es analítica para toda z . Ahora,

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z^n(a_0 + a_1/z + \cdots + a_n/z^n)}.$$

También,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} \right) = a_0 \neq 0,$$

y por lo tanto, por el Art. 9.18, existe una R tal que

$$\left| a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} \right| > \frac{|a_0|}{2} \text{ cuando } 0 < \frac{1}{|z|} < \frac{1}{R} < 1.$$

Por lo tanto, para $|z| > R$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{f(z)} \right| &= \left| \frac{1}{z^n(a_0 + a_1/z + \cdots + a_n/z^n)} \right| \\ &< \frac{1}{R^n} \frac{1}{|a_0 + a_1/z + \cdots + a_n/z^n|} \text{ ya que } |z| > R \\ &< \frac{1}{R} \frac{2}{|a_0|} \text{ ya que } 1/R < 1. \end{aligned}$$

Ahora, por el Art. 11.28, existe algún número N tal que

$$\left| \frac{1}{f(z)} \right| < N \text{ cuando } |z| \leq R.$$

Tomemos

$$M = \max \left(\frac{1}{R} \frac{2}{|a_0|}, N \right).$$

Entonces

$$\left| \frac{1}{f(z)} \right| < M \text{ para toda } z.$$

En consecuencia, por el Teorema de Liouville, $1/f(z)$, y en consecuencia $f(z)$ es constante. Esta es la contradicción que demuestra el teorema.

DESIGUALDAD DE CAUCHY

11.37. Desigualdad de Cauchy. Si $f(z)$ es analítica en un dominio D , conteniendo a z_0 , entonces existen unas constantes M y r tales que

$$|f^{(n)}(z_0)| < \frac{Mn!}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Demostración: De hecho, si N es la mínima frontera superior de $|f(z)|$ sobre un círculo γ en D con centro en z_0 (véase Fig. 11.11), podemos tomar cualquier valor $M > N$ y r igual al radio de γ . N existe por los Arts. 11.27 y 8.21. Ahora, por la fórmula de la integral de Cauchy (Art. 11.31),

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{n+1}}. \quad (1)$$

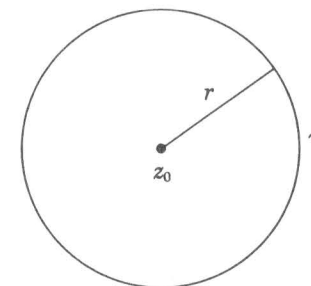


FIGURA 11.11

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &< \frac{n!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{M ds}{r^{n+1}} \\ &= \frac{Mn!2\pi r}{2\pi r^{n+1}} \\ &= \frac{Mn!}{r^n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Si tomamos $0! = 1$, entonces (1) es aún cierta (por el Art. 11.30). En consecuencia (2) también se mantiene para el caso en que $n = 0$. Así (2) es cierta para $n = 0, 1, 2, \dots$, y el teorema está demostrado.

11.38. Teorema. La secuencia de números $(n!)^2$ no puede ser los valores de las derivadas sucesivas en z_0 de alguna función $f(z)$ analítica en la vecindad de z_0 .

Demostración: Porque si fueran, necesitaríamos, por la desigualdad de Cauchy, de la existencia de una M y una r tales que

$$(n!)^2 < \frac{Mn!}{r^n}, \quad \text{o} \quad n!r^n < M, \text{ para toda } n.$$

Pero esto es imposible, porque no importa cual $r > 0$ es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n!r^n = \infty.$$

11.39. Alternativa para el teorema de Liouville. Si $f(z)$ es analítica para toda z finita, y si $|f(z)| < M$ para toda z , entonces $f(z)$ es constante.

Demostración: Sea z cualquier punto en el plano, y sea γ un círculo con centro en z y de radio r . Entonces, por la desigualdad de Cauchy,

$$|f'(z)| \leq N/r,$$

donde N es la mínima frontera superior de $|f(z)|$ sobre γ . En consecuencia, por hipótesis, no importa que r ,

$$N < M.$$

En consecuencia, no importa que r ,

$$|f'(z)| < M/r. \quad (1)$$

Pero podemos incrementar r sin límite, en cuyo caso el miembro de la derecha de (1) puede hacerse más pequeño que cualquier número positivo asignado previamente. Por lo tanto, el lado izquierdo debe ser 0. Esto es,

$$f'(z) = 0,$$

de lo cual

$$f(z) = \text{constante}.$$

11.40. El principio de los máximos. Si $f(z)$ es analítica en D , y si $|z - z_0| \leq r$ está en D , y si $|f(z)| < M$ para $|z - z_0| = r$, entonces $|f(z)| < M$ para $|z - z_0| < r$.

Demostración: Esta demostración que damos es debida a Bôcher. Por la desigualdad de Cauchy (Art. 11.37),

$$|f^{(n)}(z_0)| < Mn!/r^n.$$

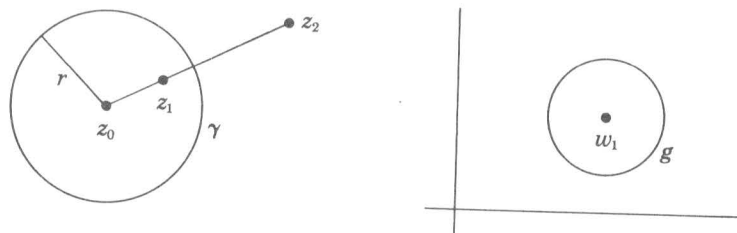


FIGURA 11.12

En consecuencia, estableciendo $n = 0$,

$$|f(z_0)| < M,$$

y el teorema es cierto para el centro del círculo $\gamma: |z - z_0| = r$. Sea z_1 cualquier otro punto dentro de γ , y sea z_2 su inverso en γ . Ciertamente existe una transformación lineal que lleva a z_2 hasta ∞ . Denotemos dicha transformación por

$$z = L(w).$$

Bajo esta transformación, γ se convierte en un círculo g , z_1 en w_1 , el centro de g .

Ahora tomamos z en γ . Entonces (por hipótesis)

$$|f(z)| < M.$$

Por lo tanto

$$|f\{L(w)\}| < M$$

para puntos w en g . Pero $z = L(w)$ es analítica en y alrededor de w_1 . En consecuencia, por la desigualdad de Cauchy,

$$|f\{L(w_1)\}| < M.$$

Esto es,

$$|f(z_1)| < M,$$

y el teorema está demostrado.

Notas: (1) Este teorema puede extenderse a lo siguiente: Si $f(z)$ es analítica en un dominio D y en su frontera C , donde C es una curva cerrada simple, entonces $|f(z)|$ alcanza su máximo en la frontera C , y no en su interior, a no ser que $f(z)$ sea una constante.

(2) Este teorema es llamado con frecuencia el *teorema del módulo máximo*.

11.41. Lema. Si $\varphi(x)$ es continua y $\leq k$ en $[a, b]$, y si

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(x) dx \geq k, \quad (1)$$

entonces $\varphi(x) = k$.

Demostración: (Ver la Fig. 11.13). Si $\varphi(x) \neq k$, entonces hay una ξ en $[a, b]$ tal que $\varphi(\xi) < k$. Como $\varphi(x)$ es continua en ξ , se sigue que hay una δ y una ϵ tales que

$$\varphi(x) \leq k - \epsilon \text{ para } \xi - \delta < x < \xi + \delta.$$

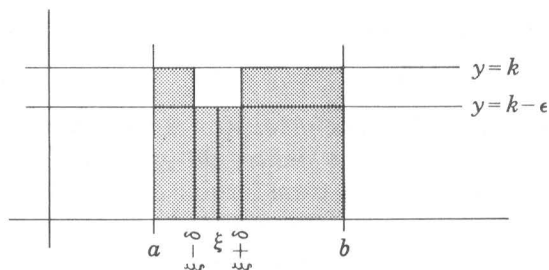


FIGURA 11.13

En consecuencia

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) dx &\leq 2\delta(k - \epsilon) + (b - a - 2\delta)k \\ &= (b - a)k - 2\delta\epsilon. \end{aligned}$$

Pero esto contradice (1). En consecuencia el teorema.

11.42. Alternativa para el teorema del módulo máximo. Si $f(z)$ es analítica en D y en su frontera C , donde C es una curva cerrada simple, entonces $|f(z)|$ alcanza su máximo en la frontera C , y no en su interior, a no ser que $f(z)$ sea constante.

Demostración: Supongamos que en un punto interior z_0 de D $|f(z)|$ tiene un valor por lo menos igual a su valor en cualquiera otra parte. Sea γ un círculo con centro z_0 cayendo enteramente en D . Entonces, por el teorema de la integral de Cauchy,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0}. \quad (1)$$

Haciendo $z - z_0 = re^{i\theta}$, $f(z)/f(z_0) = \rho e^{i\varphi}$, de tal modo que ρ y φ son funciones de θ , obtenemos de (1)

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho e^{i\varphi} d\theta. \quad (2)$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\rho e^{i\varphi}| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho d\theta. \end{aligned}$$

Pero, por hipótesis,

$$\rho = \left| \frac{f(z)}{f(z_0)} \right| = \frac{|f(z)|}{|f(z_0)|} \leq 1.$$

En consecuencia, por el Art. 11.41, $\rho = 1$ para todo valor de θ .

En (2) las partes reales de ambos lados deben ser iguales. Esto es,

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\theta,$$

ya que $\rho = 1$. Pero $\cos \varphi \leq 1$. En consecuencia, una vez más por el Art. 11.41, $\cos \varphi = 1$, de lo cual $\sin \varphi = 0$.

Tenemos ahora

$$f(z)/f(z_0) = 1,$$

o

$$f(z) = f(z_0), \text{ una constante.}$$

Esto demuestra el teorema.

11.43. Teorema. Si $f(z)$ es analítica en D y en su frontera C , donde C es una curva cerrada simple, entonces $|f(z)|$ no puede tener, en el interior de D , un mínimo que no sea cero.

Demostración: Supongamos $|f(z)| \neq 0$ en D y en C . Entonces $1/f(z)$ es analítica en D y sobre C . En consecuencia, por el Art. 11.42, $1/|f(z)|$ no alcanza un máximo en el interior de D . Esto es, $|f(z)|$ no alcanza un mínimo en el interior de D .

11.44. Teorema. Si $f(z)$ es analítica para $|z| < R$, y si $M(r)$ denota el máximo de $|f(z)|$ sobre $|z| = r$, entonces $M(r)$ es una función no decreciente de r para $r < R$.

Demostración: Por el Art. 11.42, si $r_1 < r_2$, entonces $M(r_1) \leq M(r_2)$, y $M(r_1) = M(r_2)$ sólo si $f(z)$ es constante.

11.45. Teorema. Si $|f(z)| > m$ sobre $|z| = a$, y si $f(z)$ es analítica para $|z| \leq a$, y si $|f(0)| < m$, entonces $f(z)$ tiene por lo menos un cero en $|z| < a$.

Demostración: $|f(z)|$ tiene un mínimo dentro del círculo, y este valor mínimo debe ser cero, por el Art. 11.43.

11.46. Teorema fundamental de álgebra. Cualquier polinomio de grado $n \geq 1$ tiene por lo menos un cero.

Demostración: Sea el polinomio

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

Entonces

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z^n(a_0 + a_1/z + \cdots + a_n/z^n)},$$

de lo cual

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Esto es,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty.$$

Por lo tanto, existe una a tal que

$$|f(z)| > |a_n| + 1, \text{ cuando } |z| \geq a.$$

Pero

$$|f(0)| = |a_n| < |a_n| + 1.$$

En consecuencia, por el Art. 11.45, $f(z)$ tiene por lo menos un cero dentro del círculo $|z| = a$.

EXPANSION DE TAYLOR

11.47. Expansión de Maclaurin. Si $f(z)$ es analítica en un dominio D y si el círculo $|z| < r$ cae en D , entonces

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \cdots,$$

la serie converge a $f(z)$ en el interior del círculo $|z| < r$.

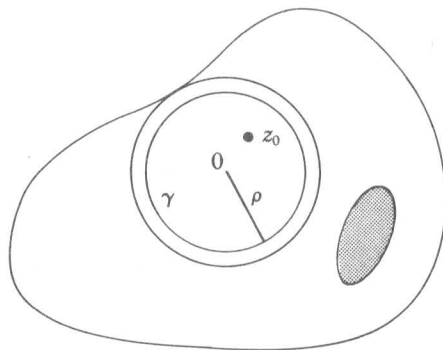


FIGURA 11.14

Demostración: Primero que nada, observamos que

$$\frac{1 - s^n}{1 - s} = 1 + s + s^2 + \cdots + s^{n-1}.$$

En consecuencia

$$\frac{1}{1 - s} = 1 + s + s^2 + \cdots + s^{n-1} + \frac{s^n}{1 - s}. \quad (1)$$

Ahora

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{t} \left\{ \frac{1}{1 - z/t} \right\}.$$

En consecuencia, de (1) haciendo $s = z/t$,

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{t} + \frac{z}{t^2} + \frac{z^2}{t^3} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{t^n} + \frac{(z/t)^n}{t - z}, \quad (2)$$

O

$$\frac{f(t)}{t - z} = \frac{f(t)}{t} + \frac{zf(t)}{t^2} + \cdots + \frac{z^{n-1}f(t)}{t^n} + \frac{z^n f(t)}{t^n(t - z)}. \quad (3)$$

Por hipótesis, el origen cae dentro de D . Como se indica en la Fig. 11.14, sea γ un círculo con centro en el origen y radio ρ en D . Sea z_0 cualquier punto en el interior de γ . Entonces, si t se toma en γ ,

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t - z_0} dt \text{ por el Art. 11.26} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t} dt + \frac{z_0}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t^2} dt + \cdots \\ &\quad + \frac{z_0^{n-1}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t^n} dt + \frac{z_0^n}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t^n(t - z_0)} dt. \end{aligned}$$

O, por el Art. 11.31,

$$f(z_0) = f(0) + f'(0)z_0 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} z_0^{n-1} + R_n, \quad (4)$$

donde

$$R_n = \frac{z_0^n}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t^n(t - z_0)} dt.$$

Pero

$$|R_n| < \frac{|z_0|^n}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{M}{\rho^n(\rho - |z_0|)} ds,$$

donde

$$|f(t)| < M \text{ para } t \text{ en } \gamma \quad \text{por el Art. 11.27.}$$

En consecuencia

$$|R_n| < \frac{|z_0|^n \rho M}{\rho^n(\rho - |z_0|)} = \left| \frac{z_0}{\rho} \right|^n K, \text{ digamos.} \quad (5)$$

Pero, como $|z_0/\rho|$ es una fracción propia, el lado derecho de (5) $\rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n| = 0,$$

y la serie (4) converge a $f(z_0)$.

Nota: Usando la notación sigma, podemos escribir la expansión de Maclaurin como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!}.$$

11.48. Expansión de Taylor. Si $f(z)$ es analítica en un dominio D , y si el círculo $|z - a| < r$ cae en D , entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(z - a)^n}{n!},$$

la serie convergiendo a $f(z)$ dentro del círculo $|z - a| < r$.

Demostración: Tenemos, por (2) del Art. 11.47,

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{t} + \frac{z}{t^2} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{t^n} + \frac{(z/t)^n}{t - z}.$$

Entonces, reemplazando t por $t - a$ y z por $z - a$, tenemos

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{t - a} + \frac{z - a}{(t - a)^2} + \cdots + \frac{(z - a)^{n-1}}{(t - a)^n} + \frac{\left(\frac{z - a}{t - a}\right)^n}{t - z},$$

o

$$\frac{f(t)}{t - z} = \frac{f(t)}{t - a} + \frac{(z - a)f(t)}{(t - a)^2} + \cdots + \frac{(z - a)^{n-1}f(t)}{(t - a)^n} + \frac{(z - a)^n f(t)}{(t - a)^n(t - z)}.$$

Por hipótesis, a cae dentro de D . Sea γ un círculo con centro en a y radio ρ en D . Sea z_0 cualquier punto dentro de γ . Entonces, si t se toma en γ ,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t - z_0} dt \quad \text{por el Art. 11.26}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t - a} dt + \frac{(z_0 - a)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t - a)^2} dt + \cdots \\ &\quad + \frac{(z_0 - a)^{n-1}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t - a)^n} dt + \frac{(z_0 - a)^n}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{(t - a)^n(t - z_0)}. \end{aligned}$$

O, por el Art. 11.31,

$$f(z_0) = f(a) + f'(a)(z_0 - a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (z_0 - a)^{n-1} + R_n,$$

donde

$$R_n = \frac{(z_0 - a)^n}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{(t - a)^n(t - z_0)}. \quad (1)$$

Pero

$$|R_n| < \frac{|z_0 - a|^n}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{M ds}{\rho^n(\rho - |z_0 - a|)},$$

donde

$$|f(t)| < M \text{ para } t \text{ en } \gamma.$$

En consecuencia

$$|R_n| < \frac{|z_0 - a|^n M \rho}{\rho^n(\rho - |z_0 - a|)} = \left| \frac{z_0 - a}{\rho} \right|^n K, \text{ digamos.} \quad (2)$$

Pero, como $|(z_0 - a)/\rho|$ es una fracción propia, el lado derecho de (2) $\rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0,$$

y la serie converge a $f(z_0)$.

Nota: La expansión de Maclaurin es un caso especial de la expansión de Taylor donde $a = 0$.

11.49. Ejemplos. (a) La expansión de Maclaurin (en reales)

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$$

se mantiene para $-1 < x < 1$ solamente, sin embargo $1/(1+x^2)$ es de clase C^∞ sobre todo el eje real. No parece que haya nada, entonces, que explique la restricción del intervalo de convergencia. Pero si remplazamos x por el argumento complejo z , entonces $1/(1+z^2)$ es analítica en todas partes excepto en $z = \pm i$ (véase Fig. 11.15). Por lo tanto, la expansión de Maclaurin

$$1 - z^2 + z^4 - \dots$$

converge a $1/(1+z^2)$ dentro del círculo $|z| < 1$. Ahora, tomando z real, vemos que la serie converge a $1/(1+x^2)$ entre $x = \pm 1$.

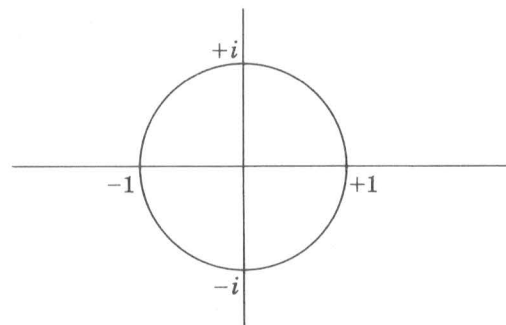


FIGURA 11.15

(b) $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots, |z| < 1,$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots, \text{ en todo el plano,}$$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots, \text{ todo el plano,}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots, \text{ todo el plano,}$$

$$\operatorname{Log} z = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \dots, |z-1| < 1,$$

ya que $\operatorname{Log} z$ es analítica en cualquier región que no corta la línea de ramificación (rama negativa del eje real).

11.50. Teorema. Si $f(z)$ es analítica en un dominio D , y si

$$f^{(n)}(a) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

donde a está en D , entonces $f(z)$ es constante en D .

Demostración: Sea z_0 cualquier punto en D . Demostraremos el teorema demostrando que $f(z_0) = f(a)$. Conectamos a con z_0 , como se indica en la Fig. 11.16, por medio de una línea quebrada γ , que cae en su totalidad dentro de D .

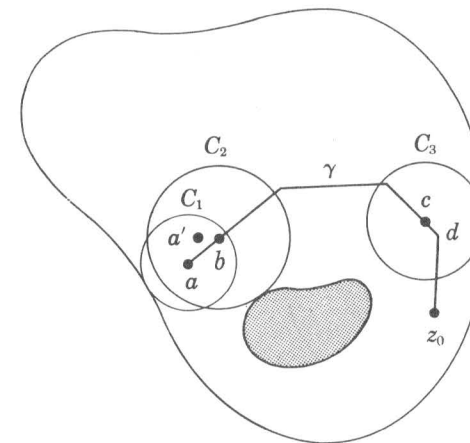


FIGURA 11.16

Expandiendo $f(z)$ por medio de una expansión de Taylor alrededor de $z = a$, tenemos

$$f(z) = f(a)$$

dentro del círculo C_1 . Ahora escogemos el punto b en el interior de C_1 y sobre γ , y tal que el círculo C_1 incluye a a' en C_1 . Aplicando la expansión de Taylor a $f(z)$ en $z = b$, tenemos

$$f(z) = f(b) + f'(b)(z-b) + \dots$$

dentro del círculo C_2 . Por lo tanto

$$f(a) = f(a') = f(b) + f'(b)(a'-b) + \dots$$

Pero, como b está dentro de C_1 , $f(b) = f(a)$. Por lo tanto, como $a' - b \neq 0$, $f'(b) = f''(b) = \dots = 0$, y tenemos

$$f(z) = f(a)$$

dentro del círculo C_2 .

Continuando este proceso, eventualmente obtenemos un círculo C_i que incluye a z_0 . Porque supongamos que no obtenemos dicho círculo. Entonces debe haber un último punto d sobre γ para el cual

$$f(d) = f(a).$$

Tomemos c sobre γ justo detrás de d . Dibujemos el círculo C_3 . Entonces d cae dentro de C_3 . En consecuencia d no es el último punto. Así tenemos

$$f(z_0) = f(a).$$

Nota: No hay ningún teorema para reales semejante al anterior. Así e^{-1/x^2} es de clase C^∞ , y todas sus derivadas se desvanecen en el origen, pero la función no es constante.

11.51. Teorema. Si $f(z)$ es analítica en un dominio D , y si $f(z) = 0$ sobre una curva regular γ en D , entonces $f(z) \equiv 0$ a través de D .

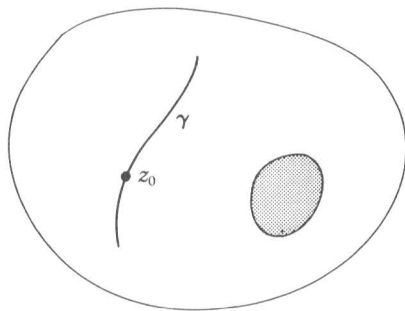


FIGURA 11.17

Demostración: Como se indica en la Fig. 11.17, tomamos cualquier punto z_0 sobre γ , y sea $z_0 + \Delta z$ un punto en la vecindad sobre γ . Entonces, como $f(z)$ es analítica en D , $f'(z_0)$ es independiente del modo de aproximación de $z_0 + \Delta z$ a z_0 . En consecuencia tenemos

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ z_0 + \Delta z \text{ sobre } \gamma}} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = 0.$$

De una manera semejante, encontramos

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = 0$$

para cualquier punto z_0 sobre γ . En consecuencia, por el Art. 11.50, $f(z) \equiv 0$ a través de D .

11.52. Teorema. Si $f(z)$ y $\varphi(z)$ son analíticas en D , y si $f(z) = \varphi(z)$ sobre una curva regular γ en D , entonces $f(z) \equiv \varphi(z)$ a través de D .

Demostración: Este es un corolario inmediato del Art. 11.51.

11.53. Teorema. Hay cuando mucho una función analítica que se reduce a una función real dada sobre el eje x .

Demostración: Supongamos que hay dos funciones tales, $f(z)$ y $\varphi(z)$. Entonces sobre el eje x tenemos $f(x) = \varphi(x)$. En consecuencia, por el Art. 11.52, $f(z) \equiv \varphi(z)$.

Ejemplo: Así $e^x(\cos y + i \sin y)$ es la única función analítica que se reduce a e^x sobre el eje de los reales.

11.54. Nota. En vista del Art. 11.53, el requisito (b) del Art. 10.01 y el requisito (b) del Art. 10.23 son redundantes.

11.55. Teorema. Si $f(z)$ y $\varphi(z)$ son analíticas en D , y si

$$f^{(n)}(a) = \varphi^{(n)}(a), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

donde a está en D , entonces

$$f(z) \equiv \varphi(z)$$

a través de D .

Demostración: Consideremos la función

$$F(z) = f(z) - \varphi(z),$$

y entonces apliquemos el Art. 11.50.

Nota: Este teorema establece que una función analítica está completamente determinada a través del dominio en donde es analítica cuando el valor de la función y cada una de sus derivadas son conocidos para un punto del dominio en el cual es analítica.

11.56. Alternativa para el teorema de Liouville. Si $f(z)$ es analítica para toda z finita, y si $|f(z)| < M$ para toda z , entonces $f(z)$ es constante.

Demostración: Como $f(z)$ es analítica para toda z finita, entonces la expansión de Maclaurin

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!} \quad (1)$$

es convergente para toda z . También, si $|f(z)| < M$ para toda z , entonces, por la desigualdad de Cauchy,

$$|f^{(n)}(0)| < \frac{Mn!}{r^n} \quad (2)$$

para todos los valores de n y r . Haciendo que $r \rightarrow \infty$, el lado derecho de (2) $\rightarrow 0$ si $n > 0$. En consecuencia, $f^{(n)}(0) = 0$ para $n > 0$, y $f(z) = f(0)$, una constante.

11.57. Teorema. Si $f(z)$ es analítica para toda z finita, y si $|f(z)| < N|z|^k$ para $|z| > \rho$, entonces $f(z)$ es un polinomio de grado $\leq k$.

Demostración: Como $f(z)$ es analítica para toda z finita, entonces la expansión de Maclaurin

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!} \quad (1)$$

es convergente para toda z . Por lo tanto, por la desigualdad de Cauchy,

$$|f^{(n)}(0)| < \frac{Nr^k n!}{r^n}, \quad r > \rho \quad (2)$$

$$= Nn! r^{k-n}.$$

Haciendo $r \rightarrow \infty$, el lado derecho de (2) $\rightarrow 0$ si $n > k$. En consecuencia $f^{(n)}(0) = 0$ para $n > k$, y el teorema se sigue sustituyendo en (1).

Nota: Este teorema es una generalización del Teorema de Liouville.

11.58. Lema. Si $\varphi(t)$ es continua sobre una curva regular C , y si z_0 es un punto no en C , entonces

$$F(z) = \int_C \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$$

es analítica en z_0 .

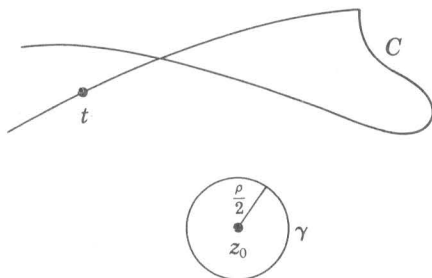


FIGURA 11.18

Demostración: Por el Art. 11.29, existe $\rho > 0$ tal que $|t - z_0| > \rho$ para todos los puntos t sobre C . Como se indica en la Fig. 11.18, dibujemos el círculo γ con centro en z_0 y de radio $\rho/2$. Sea $z_0 + \Delta z$ un punto dentro de γ . Entonces $|\Delta z| < \rho/2$. Así

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F(z_0)}{\Delta z} &= \frac{F(z_0 + \Delta z) - F(z_0)}{\Delta z} \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_C \varphi(t) \left\{ \frac{1}{t - z_0 - \Delta z} - \frac{1}{t - z_0} \right\} dt \\ &= \int_C \frac{\varphi(t) dt}{(t - z_0 - \Delta z)(t - z_0)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F}{\Delta z} - \int_C \frac{\varphi(t) dt}{(t - z_0)^2} &= \int_C \varphi(t) \left\{ \frac{1}{(t - z_0 - \Delta z)(t - z_0)} - \frac{1}{(t - z_0)^2} \right\} dt \\ &= \Delta z \int_C \frac{\varphi(t) dt}{(t - z_0)^2 (t - z_0 - \Delta z)}. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta z} - \int_C \frac{\varphi(t) dt}{(t - z_0)^2} \right| < \frac{|\Delta z| ML}{\rho^2 \cdot \rho/2}, \quad (1)$$

donde

- (1) $|\varphi(t)| < M$ para t sobre C . Una M tal existe por el Art. 11.27.
- (2) L es la longitud de C .
- (3) $|t - z_0 - \Delta z| \geq |t - z_0| - |\Delta z| > \rho - \rho/2 = \rho/2$.

En consecuencia, de (1), se sigue que en el límite cuando $\Delta z \rightarrow 0$ tenemos

$$F'(z_0) = \int_C \frac{\varphi(t)}{(t - z_0)^2} dt.$$

Esto demuestra que $F(z)$ es analítica en $z = z_0$.

11.59. Teorema. El restante en la expansión de Taylor es analítico para puntos dentro del círculo de convergencia.

Demostración: Ver (1) del Art. 11.48.

$$\varphi(t) = \frac{f(t)}{(t - a)^n}$$

es continua sobre el círculo de convergencia γ . En consecuencia el teorema se sigue del Art. 11.58.

CEROS

11.60. Definición. Si $f(z)$ es analítica en la vecindad de $z = a$, y si $f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$ pero $f^{(k)}(a) \neq 0$, entonces decimos que $f(z)$ tiene un *cero de orden k* en $z = a$.

11.61. Teorema. Si $f(z)$ tiene un cero de orden k en $z = a$, entonces

$$f(z) = (z - a)^k \varphi(z), \quad (1)$$

donde $\varphi(z)$ es analítica en $z = a$ y $\varphi(a) \neq 0$.

Demostración: Por la expansión de Taylor, tenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n, \quad (2)$$

la serie que converge a $f(z)$ en algún círculo γ alrededor de $z = a$. Pero, por hipótesis,

$$f^{(n)}(a) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, k-1, \quad f^{(k)}(a) \neq 0.$$

En consecuencia (2) se convierte en

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

Escribiendo esto como una expansión de Taylor con residuo, por (1) del Art. 11.48, encontramos

$$\begin{aligned} f(z) &= f^{(k)}(a) \frac{(z - a)^k}{k!} + \frac{(z - a)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{(t - z)(t - a)^{k+1}} \\ &= (z - a)^k \left\{ \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + (z - a)P(z) \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

donde

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{(t - z)(t - a)^{k+1}}.$$

Ahora, lo que está entre las llaves en (3) es analítico en $z = a$ ya que $P(z)$ es analítica ahí por el Art. 11.59. También, como $P(z)$ es analítica en $z = a$, $P(a)$ es finita, y vemos que

$$\left\{ \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + (a - a)P(a) \right\} = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \neq 0.$$

Esto demuestra el teorema.

11.62. Teorema. Si $f(z)$ tiene un cero de orden k en $z = a$, entonces $f'(z)$ tiene un cero de orden $k - 1$ en $z = a$.

Demostración: Obtenemos este teorema diferenciando (1) del Art. 11.61.

11.63. Definición. El *número de ceros* de $f(z)$ en D es la suma de los órdenes de los ceros en D .

11.64. Definición. El *número de veces* que $f(z)$ toma el valor C en D es el número de ceros que tiene $f(z) - C$ en D .

11.65. Teorema. Si $z = a$ es un cero de $f(z) \neq 0$, entonces en una vecindad suficientemente pequeña de $z = a$, $z = a$ es el único cero de $f(z)$.

Demostración: Tenemos, por el Art. 11.61,

$$f(z) = (z - a)^k \varphi(z),$$

donde

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = A \neq 0.$$

Por lo tanto existe una δ tal que

$$|A| - |\varphi(z)| \leq |\varphi(z) - A| < \frac{|A|}{2}, \quad 0 < |z - a| < \delta.$$

Esto es,

$$|\varphi(z)| > \frac{|A|}{2} > 0, \quad 0 < |z - a| < \delta,$$

lo que demuestra el teorema.

Nota: Brevemente, este teorema establece que los ceros de una función analítica están aislados.

11.66. Teorema. Si $f(z)$ es analítica en D , y si z_k , ($k = 1, 2, \dots$), es una secuencia de puntos en D tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = a$, a en D , y si $f(z_k) = 0$, entonces $f(z) \equiv 0$ a través de D .

Demostración: El punto a es ciertamente un cero porque, como $f(z)$ es analítica en a ,

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a).$$

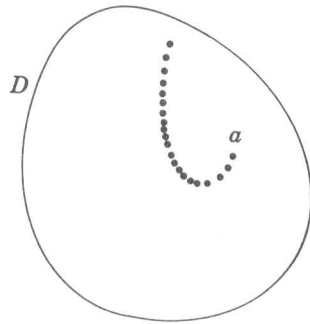


FIGURA 11.19

Más aún, el límite es independiente del acercamiento. Pero el acercamiento particular a través de la secuencia z_k nos da

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = 0.$$

En consecuencia $f(a) = 0$ y a es un cero.

Ahora no existe ninguna vecindad de $z = a$ en la cual a es el único cero. En consecuencia, por el Art. 11.65, debe suceder que $f(z) \equiv 0$ en D .

Nota: Este teorema es una generalización del Art. 11.51.

11.67. Teorema. Si $f(z)$ es analítica en una región circunscrita cerrada R , y si $f(z)$ tiene infinito número de ceros en R , entonces $f(z) \equiv 0$ en R .

Demostración: Como los ceros forman un conjunto circunscrito infinito, hay un punto límite a del conjunto, y como R es cerrada, a cae en R . El teorema ahora se sigue del Art. 11.66.

11.68. Teorema. Si $f(z)$ y $\varphi(z)$ son analíticas en una región circunscrita cerrada R , y si $f(z) = \varphi(z)$ en un infinito número de puntos de R , entonces $f(z) \equiv \varphi(z)$ en R .

Demostración: Aplicando el Art. 11.67 a $F(z) = f(z) - \varphi(z)$.

Ejemplo: La función

$$\operatorname{sen} \frac{1}{z-1}$$

es ciertamente analítica en el interior del círculo unitario. Más aún, tiene infinito número de ceros ahí, en los puntos

$$z = 1 + 1/k\pi, \quad k = -1, -2, -3, \dots$$

¿Es por lo tanto la función idénticamente cero en el círculo unitario? Sabemos que esto no es así. La explicación aquí es que nuestra región no es *cerrada*, y el punto límite de los ceros está en la frontera de la región en $z = 1$.

PROBLEMAS PARA CAPITULOS DEL 1 AL 11

CAPITULO 1

1. Demostrar que si la suma y el producto de dos números complejos son reales, entonces los dos números son reales o bien uno es conjugado del otro.

2. Demostrar que $z + 1/z$, $z \neq 0$, es real si y sólo si z es real o bien $|z| = 1$.

3. ¿Cuáles de los siguientes números son reales y cuáles imaginarios puros?

(a) $z^2 - \bar{z}^2$

(b) $[(1/z + 1/\bar{z})(z + \bar{z})]/(z - \bar{z})$

(c) $z\bar{w} - w\bar{z}$

(d) $z\bar{w} + w\bar{z}$

(e) $(z\bar{w} + \bar{z}w)/(z\bar{z} - 1)$

(f) $(z\bar{w} - \bar{z}w)/i(z\bar{z} + w\bar{w})$

4. Si Z es la imagen de un número complejo z , construir las imágenes de z^2 , z^3 , $\dots$,

5. Si n es un entero positivo, demostrar que $\cos^n \theta = \text{cis } n\theta$.

6. Sea Z la imagen de un número complejo z y sea U el punto unitario sobre el eje real. Dibujar el círculo OUZ y sea MN el diámetro perpendicular a UZ , siendo escogido M de tal modo que $OM < UM$. Hagamos que ON corte al círculo con centro M y que pasa por U en los puntos P y Q . Demostrar que P y Q son las imágenes de $\pm\sqrt{z}$.

7. Demostrar que $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.

8. Verificar que cada una de las relaciones siguientes representa un medio plano:

(a) $\text{Re}(z - iz) \geq 2$

(b) $|z - 1| \leq |z + 3|$

(c) $1 \leq \arg z \leq 1 + \pi$

9. Verificar que cada una de las relaciones siguientes represente una región circular cerrada:

- (a) $|1/z| \geq 1/4$
- (b) $|z - 1| \geq 4|z + 1|$
- (c) $|2z + 3 + 5i| \leq 4$

10. Verificar que cada una de las relaciones siguientes represente una región elíptica con fronteras:

- (a) $|z - 2| + |z + 2| \leq 6$
- (b) $|z - 4i| + |z + 4i| \leq 12$

11. Demostrar que si los puntos A , B y P son las imágenes de los números complejos a , b y p , y si el punto P divide al segmento AB con la relación k , entonces $p = (a + kb)/(1 + k)$.

12. Demostrar que si el centroide de un triángulo coincide con su circuncentro, entonces el triángulo es equilátero.

13. Demostrar que si un cuadrilátero está inscrito en un círculo cuyo centro es el centroide de los cuatro vértices del cuadrilátero, entonces el cuadrilátero es un rectángulo.

14. Demostrar que si los cuatro puntos distintos A , B , C y D son las imágenes de los números complejos a , b , c y d , respectivamente, entonces AB es perpendicular a CD si y sólo si

$$(b - a)(\bar{d} - \bar{c}) + (\bar{b} - \bar{a})(d - c) = 0.$$

15. Demostrar que si los triángulos ABC' , BCA' y CAB' son directamente semejantes, entonces los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen un centroide común.

16. Supongamos que los triángulos ABA' , BCB' , CDC' y DAD' están trazados exteriormente sobre los lados del cuadrángulo convexo $ABCD$. (a) Si $AC = BD$, demostrar que $A'C'$ es perpendicular a $B'D'$. (b) Si AC es perpendicular a BD , demostrar que $A'C' = B'D'$.

CAPITULO 2

1. Demostrar que un cero común de dos polinomios es un cero de su máximo común divisor, y a la inversa.

2. Resolver la ecuación $2z^4 + 9z^2 + 17z - 21 = 0$, que tiene una raíz común con la ecuación $z^3 + 2z^2 + 4z + 21 = 0$

3. La ecuación $z^6 + z^5 + z^4 - z^3 - 14z^2 - 6z + 6 = 0$ tiene dos raíces cuya suma es cero. Encontrarlas.

4. Determinar a y b tales que 1 sea una raíz doble de la ecuación $z^4 + az^3 + (a - b)z^2 + bz + 1 = 0$.

5. Resolver la ecuación $z^4 - 4iz + 3 = 0$, dado que tiene una raíz repetida.

6. Demostrar que $z^n - nz^{n-1} + 1 = 0$, $n \neq 2$, no tiene raíz repetida.

7. Demostrar que es imposible encontrar tres números complejos distintos tales que el cuadrado de cada uno sea igual a la suma de los otros dos.

8. Los vértices de un triángulo en el plano complejo son las raíces de la ecuación $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$. Encontrar la ecuación cuyas raíces son los puntos medios de los lados.

9. Demostrar que las raíces de la ecuación cúbica $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, $a \neq 0$, son los vértices de un triángulo equilátero si y sólo si $3ac - b^2 = 0$.

10. Demostrar que las raíces de la ecuación $z^4 + 4iz^3 - 6z^2 - 4iz - i = 0$ son los vértices de un cuadrado.

11. Demostrar que la ecuación

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0, a_0 \neq 0,$$

tiene por lo menos una raíz cuyo valor absoluto $\leq \sqrt[n]{|a_n/a_0|}$, y por lo menos una raíz cuyo valor absoluto $\geq \sqrt[n]{|a_n/a_0|}$.

12. Demostrar que es posible escoger t tan grande que el valor absoluto de por lo menos una raíz de la ecuación

$$z^4 + 3tz^3 - 5z^2 + (t^3 + 1)z - 2 = 0$$

sea mayor que cualquier número real asignado previamente.

13. Demostrar que si w es una raíz de la ecuación

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

tal que $|w| \leq P$ ($P > 0$), entonces

$$|a_n| \leq |a_0|P^n + |a_1|P^{n-1} + \dots + |a_{n-1}|P.$$

14. Demostrar que si w es una raíz de la ecuación

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

tal que $|w| \geq Q > 0$, entonces

$$|a_0|Q^n \leq |a_1|Q^{n-1} + |a_2|Q^{n-2} + \dots + |a_{n-1}|Q + |a_n|.$$

En consecuencia, demostrar que si $M > 0$ satisface la desigualdad

$$|a_0|M^n \geq |a_1|M^{n-1} + |a_2|M^{n-2} + \dots + |a_{n-1}|M + |a_n|,$$

entonces el valor absoluto de toda raíz de la ecuación $\leq M$.

CAPITULO 3

1. Demostrar que la función racional $f(z)/g(z)$ es continua en cualquier punto z_0 para el cual $g(z_0) \neq 0$.

2. Encontrar el grado, los ceros con órdenes y los polos con órdenes de $(z-1)^3(z-i)^2/(z-1)(z^2+2iz-1)$. ¿Para qué valores de z es continua esta función?

3. Sea

$$F(z, w) = (az + bw)(cz + dw) + ew^2 + fw + g,$$

$$G(z, w) = az + bw, \quad |a| > 0, \quad |b| > 0.$$

(a) Considerado como una función de z , encontrar el cociente y el residuo cuando $F(z, w)$ es dividida entre $G(z, w)$.

(b) Considerado como una función de w , encontrar el cociente y el residuo cuando $F(z, w)$ es dividida entre $G(z, w)$.

4. Consideremos $w = (z + 1/z)/2$ como una proyección del plano z en el plano w . Demostrar qué círculos alrededor del origen y líneas rectas por el origen del plano z corresponden en el plano w a elipses confocales e hipérbolas con focos en los puntos $+1$ y -1 .

CAPITULO 4

1. Demostrar los Teoremas 4.03 hasta 4.06 por geometría sintética elemental.

2. Demostrar que si los puntos P y Q sobre una esfera de Neumann K de diámetro d son reflexiones uno del otro en el plano ecuatorial de K , entonces sus imágenes P' y Q' en el plano de Gauss son inversas una de la otra en el círculo con centro en el origen y radio d .

3. Demostrar que la proyección estereográfica es una inversión espacial teniendo el polo norte de la esfera de Neumann como centro y el cuadrado del diámetro de la esfera de Neumann como potencia.

4. Demostrar que si z es el número complejo correspondiente al punto (ξ, η, ζ) sobre la esfera de Neumann, entonces $|z| > M$ si y sólo si

$$(1 - \zeta) < 1/(1 + M^2), \quad M > 0.$$

5. Sea $P(\xi, \eta, \zeta)$ un punto sobre la esfera de Neumann. Demostrar que la distancia desde $N(0, 0, 1)$ hasta P es igual a $\sqrt{1 - \zeta}$.

6. Demostrar que los números complejos $|z| > M$ corresponden a los puntos sobre la esfera de Neumann que caen dentro de una capa esférica cuyo radio es igual a $1/\sqrt{1 + M^2}$, $M > 0$.

7. Encontrar las imágenes en el plano de Gauss, bajo la proyección estereográfica, de dos puntos antípodas de la esfera de Neumann.

8. Consideremos la proyección central del hemisferio sur, desde su centro, sobre el plano tangente al hemisferio en su polo. Encontrar expresiones analíticas para la proyección inducida del plano en el hemisferio y demostrar que esta proyección es conformante sólo en el polo.

CAPITULO 5

1. Demostrar que el triángulo ABC es equilátero si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Demostrar que los puntos A , B y C son colineales si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Si el punto P es obtenido girando el punto B alrededor del punto A ángulo θ , demostrar que $p = a + e^{i\theta}(b - a)$.

4. Demostrar que el área del triángulo ABC está dada por

$$(i/4) \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Demostrar que es condición necesaria y suficiente para que los puntos A , B y C sean vértices de un triángulo equilátero, que

$$1/(b - c) + 1/(c - a) + 1/(a - b) = 0.$$

6. Si $|t| = 1$ y si $t^n = 1$, n un entero positivo, demostrar que las imágenes de $t, t^2, \dots, t^n$ son los vértices de un polígono regular de n lados de radio unitario y con centro en el origen.

7. Si en el plano complejo c y d son un par de vértices opuestos de un cuadrado, encontrar los otros vértices.

8. Si los triángulos isósceles rectos ABA' , BCB' , CDC' y DAD' están trazados sobre los lados como hipotenusas de un cuadrilátero convexo $ABCD$, demostrar que $A'C'$ es igual y perpendicular a $B'D'$.

9. Si $AA'BB'CC'$ es un hexágono inscrito en un círculo tal que $AA' = BB' = CC' = r$, el radio del círculo, y si U , V y W son los puntos medios de los lados $C'A$, $A'B$ y $B'C$, demostrar que el triángulo UVW es equilátero.

10. Demostrar analíticamente que dos inversiones con distintos centros son permutables si y sólo si los dos círculos de inversión son ortogonales entre sí.

11. Demostrar analíticamente que una inversión es permutable con una reflexión en una línea si y sólo si el centro de inversión cae en el eje de reflexión.

12. Demostrar que tres puntos distintos pueden, en general, ser invertidos en vértices de un triángulo de forma dada.

13. (a) Demostrar que el conjunto de todas las transformaciones bilineales que proyectan a un círculo en sí mismo y al interior de un círculo en sí mismo constituyen un grupo de transformación. (Dicho grupo es conocido como *grupo Fuchsiano*.)

(b) Demostrar que el conjunto de todas las transformaciones bilineales de la forma

$$z' = (az + \bar{c})/(cz + \bar{a}), \quad a\bar{a} - c\bar{c} = 1,$$

constituye un grupo de transformación. (Este grupo es llamado algunas veces el *grupo* Q_0 .)

(c) Demostrar que una transformación del grupo Q_0 proyecta al círculo unitario con centro en el origen en sí mismo y al interior de este círculo en sí mismo.

(d) Demostrar que el conjunto de todas las transformaciones de la forma

$$z' = (az + b)/(cz + d), \quad ad - bc = 1,$$

donde a , b , c y d son enteros, constituye un grupo de transformación. (Este grupo es conocido como el *grupo modular*.)

(e) Demostrar que el conjunto de todas las transformaciones bilineales de la forma

$$z' = (az + b)/(cz + d), \quad ad - bc = 1,$$

donde a , b , c y d son enteros Gaussianos (esto es, números complejos de la forma $m + in$, donde m y n son enteros) constituye un grupo de transformación. (Este grupo es conocido como el *grupo Picard*.)

14. Demostrar que la relación cruzada de cuatro puntos diferentes en el plano complejo es independiente de la posición del sistema coordenado complejo superpuesto.

15. Demostrar que las triadas de puntos A , B , C y A' , B' , C' son directamente semejantes si y sólo si $(abc\infty) = (a'b'c'\infty)$, y son inversamente semejantes si y sólo si $(abc\infty) = \overline{(a'b'c'\infty)}$.

16. Demostrar que la relación cruzada de cuatro puntos diferentes no puede nunca ser 1, 0 o ∞ .

17. Demostrar que $(z01\infty) = z$.

18. Demostrar el *Teorema de Schick*: Si A' , B' y C' son los pies de las perpendiculares desde P sobre los lados BC , CA y AB del triángulo ABC , entonces

$$(a'b'c'\infty) = \overline{(abcp)}.$$

19. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que D sea el circuncentro del triángulo ABC es que $(abcd) = \overline{(abc\infty)}$.

20. Encontrar el lugar geométrico de Z si: (a) $|(abcz)| = 1$, (b) $(abcz)$ es imaginaria pura.

21. Encontrar una transformación bilineal que proyecte planimétricamente al dominio interior del círculo unitario en el dominio $|z' - 1| < 1$ y lleve a $z = 0$ y $z = 1$ a $z' = \frac{1}{2}$ y $z' = 0$, respectivamente. ¿Está determinada esta transformación como única?

22. Encontrar la forma general de una transformación bilineal que proyecte al semiplano superior en sí mismo.

23. Encontrar una transformación bilineal que proyecte al dominio $|z| < 1$ en el semiplano superior y lleve a 1, i y -1 a 0, 1 e ∞ , respectivamente.

24. Demostrar que la transformación bilineal que lleva a 1, i y -1 a i , 0 y $-i$, respectivamente, proyecta al dominio exterior del círculo unitario en el semiplano derecho.

25. Encontrar una transformación bilineal que proyecte a dos círculos no concéntricos y que no se intersectan $|z - z_1| = r_1$ y $|z - z_2| = r_2$ en dos círculos con centro en $z' = 0$. ¿Está determinada esta transformación como única?

CAPITULO 6

1. Demostrar el Teorema 6.06.
2. Demostrar el Teorema 6.16.
3. Demostrar el Teorema 6.19.
4. Demostrar que la función $(z^2 - z + 1)^3/(z^2 - z)^2$ es automorfa y que su grupo de transformaciones lineales consiste de

$$z, 1/z, 1 - z, 1/(1 - z), (z - 1)/z, z/(z - 1).$$

5. Demostrar que la función $(z + 1/z)/2$ es automorfa.
6. Demostrar que el grupo de transformaciones lineales de una función racional automorfa es finito.

CAPITULO 7

1. Construir una superficie de Riemann para $w^2 = (i - z)(i + z)$.
2. Construir una superficie de Riemann para $w^2 = (z - a)(z - b)^2$, $a \neq b$.
3. Construir una superficie de Riemann para $w^3 - 3w - 2z = 0$.

$$4. \text{ Construir una superficie de Riemann para } w = \sqrt{z - a} + \sqrt[3]{z^2/(z - b)}, a \neq b.$$

$$5. \text{ Construir una superficie de Riemann para } w^4 - 4w = z.$$

$$6. \text{ Construir una superficie de Riemann para } w = \sqrt{z - i} + \sqrt{z - 2}.$$

$$7. \text{ Construir una superficie de Riemann para } w = \sqrt{z - 1} + 1/\sqrt{z + 2}.$$

$$8. \text{ Construir una superficie de Riemann para } w + 1/w - z = 0.$$

9. ¿Es posible para una función de múltiple valuación tener el mismo valor en dos puntos superpuestos de su superficie de Riemann? ¿Puede tener el mismo valor en infinitos de dichos puntos? ¿Puede tener el mismo valor en todos los puntos de una vecindad de dos de dichos puntos?

10. Demostrar que si exactamente dos líneas de ramificación emanan del mismo punto de ramificación, entonces la co-

nexión de las hojas a lo largo de una de estas líneas de ramificación es diferente de la conexión a lo largo de la otra.

11. Demostrar que si dos líneas de ramificación, teniendo diferentes secuencias de intercambio de hojas asociadas a ellas, emanan de un punto común, entonces este punto es un punto de ramificación o bien es una extremidad de por lo menos otra línea de ramificación.

12. ¿Puede una línea de ramificación ser una curva cerrada?

13. Demostrar que el efecto de describir un circuito cerrado alrededor de varios puntos de ramificación es el mismo si el punto variable hubiera descrito una trayectoria cerrada alrededor de cada uno de los puntos de ramificación en sucesión.

14. Demostrar que dos funciones $w = \sqrt{z^2 - 1}$ y $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ pueden ser representadas sobre la misma superficie de Riemann.

15. Sea $w = f(z)$ una función (analítica) de múltiple valuación para la cual la función inversa $z = \phi(w)$ es de simple valuación. Demostrar que si la función derivada $\phi'(w)$ tiene un cero de orden k , o un polo de orden $k + 2$, en w_0 , entonces $f(z)$ tiene un punto de ramificación de orden k en el punto correspondiente z_0 .

CAPITULO 8

1. Evaluar los siguientes límites, si existen:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/|x|}, (b) \lim_{x \rightarrow 0+} e^{-1/x}, (c) \lim_{x \rightarrow 0-} e^{-1/x}.$$

$$2. \text{ Encontrar } \lim_{h \rightarrow 0-} (\tan h)/h.$$

3. ¿En cuál de los siguientes intervalos es continua la función $[x]$?

$$(a) (0, 1), (b) (0, 1], (c) [0, 1), (d) [0, 1].$$

4. ¿Es continua $[1 - [x]]$ en la derecha? ¿En la izquierda?

5. ¿Es la función $|x|^3$ de clase C^2 ?

6. Construir una función $f(x)$ de clase C^n , pero no de clase C^{n+1} .

7. Encontrar ξ en el Teorema de Rolle para $f(x) = x^3(1 - x)^5$, $a = -1$, $b = 2$.

8. Demostrar que $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ satisface la hipótesis del Teorema de Rolle para $a = 0$, $b = 1$. Encontrar ξ . Demostrar que $f(x)$ no es de clase C^1 en $[0, 1]$.

9. Demostrar que $f(x) = x \sin(1/x)$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, satisface la hipótesis del Teorema de Rolle para $a = 0$, $b = 1/\pi$. ¿Cuántos valores de ξ existen? ¿Es $f(x)$ de clase C^1 en $[0, 1/\pi]$?

10. Encontrar ξ en la ley de Cauchy de la media si $f(x) = \tan^{-1} x$, $a = 1$, $b = \sqrt{3}$.

11. Encontrar ξ en la ley de Cauchy de la media si $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, $A \neq 0$.

12. Demostrar el Teorema 8.22.

13. Demostrar el Teorema 8.23.

14. Formular definiciones para las derivadas de la derecha y de la izquierda de una función $f(x)$ en $x = a$. [Es costumbre denotar las derivadas de la derecha y las de la izquierda de $f(x)$ en $x = a$, si existen, por $f'_+(a)$ y $f'_-(a)$, respectivamente.]

15. Si $f(x)$ es de clase C^1 en $[a, b]$, demostrar que $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$.

16. Sea $f(x, y) = 1$ para $xy \neq 0$ y 0 para $xy = 0$.

(a) Demostrar que $f(x, 0)$ es continua para toda x y $f(0, y)$ es continua para toda y , pero que $f(x, y)$ no es continua en $(0, 0)$.

(b) Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$.

17. Decimos que $f(x, y)$ es *diferenciable* en (a, b) si y sólo si $f_x(a, b)$, y $f_y(a, b)$ existen y si

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \phi(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \psi(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

donde $\phi(\Delta x, \Delta y)$ y $\psi(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

(a) Demostrar que $2x^2 - x^2y - y + 2$ es diferenciable en $(0, 0)$.

(b) Demostrar que si $f(x, y)$ es de clase C^1 en un dominio D , entonces $f(x, y)$ es diferenciable en todos los puntos de D .

(c) Demostrar que $f(x, y) = |x|(1 + y)$ es de clase C^0 en $(0, 0)$, pero no es diferenciable ahí.

(d) Demostrar que $f(x, y) = x$ cuando $|y| < |x|$, $f(x, y) = -x$ cuando $|y| \geq |x|$, es de clase D^1 en $(0, 0)$, pero no es diferenciable ahí.

(e) Demostrar que $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$, $g(x) = x^2 \sin(1/x)$, $g(0) = 0$, es diferenciable en $(0, 0)$, pero no es de clase C^1 ahí.

18. Demostrar que si $f(x, y)$ es diferenciable en un punto, entonces es continua ahí.

19. Demostrar que $\sqrt{|xy|}$ no es diferenciable en $(0, 0)$.

20. Si $f(x, y) = x^2 - 2y$, encontrar $\frac{\partial f(1, 2)}{\partial s_{3\pi/4}}$.

21. Demostrar que las siguientes parejas de funciones son conjugadas:

(a) $u = x^3 - 3xy^2$, $v = 3x^2y - y^3$, en cualquier región R .

(b) $u = -x/(x^2 + y^2)$, $v = y/(x^2 + y^2)$, en cualquier región R que no contenga al origen.

22. Demostrar que las funciones siguientes son armónicas:

$$(a) u = -2xy, \quad (b) u = x^3 - 3xy^2.$$

23. Demostrar el Teorema 8.88.

24. Demostrar el Teorema 8.90.

25. Demostrar el Teorema 8.91.

26. Demostrar el Teorema 8.92.

27. Sea C_1 el arco del círculo unitario desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$; sea C_2 la línea quebrada desde $(1, 0)$ hasta $(1, 1)$ y hasta $(0, 1)$. Calcular

$$\int_{C_1} xy \, dx + (x + y) \, dy, \quad \int_{C_2} xy \, dx + (x + y) \, dy.$$

28. Calcular $\int_C (x^2 + y) \, dx + (2x + y^2) \, dy$ sobre las fronteras en el sentido de las manecillas del reloj del cuadrado que tiene los vértices $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$ y $(2, 1)$.

29. Calcular $\int_C (x \, dy - y \, dx)/(x^2 + y^2)$, donde C es toda la curva en sentido contrario al de las manecillas del reloj $x = 1 + 2 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$.

30. Empleando el *teorema del valor intermedio* del análisis real, demostrar lo siguiente:

(a) Existe un triángulo acutángulo (oxigonio) tal que la distancia entre su circuncentro y su ortocentro es exactamente un sexto del perímetro del triángulo.

(b) Un alambre tensado entre dos paredes paralelas opuestas de una tienda es bajado y usado, sin cortarlo, para amarrar un gran bulto, el cual es dejado entonces en el suelo de la tienda. Hay por lo menos un punto del alambre cuyas distancias a las dos paredes son exactamente las mismas que antes de que fuera bajado.

CAPITULO 9

1. Consideremos la función $f(z) = 0$ cuando $z = 0$ o cuando $|z|$ es irracional, $f(z) = 1/q$ cuando $|z| = p/q$, donde p y q son relativamente enteros positivos primos. Demostrar que $f(z)$ es continuo en $z = 0$ y en todos los puntos z para los cuales $|z|$ es irracional, y que $f(z)$ es discontinua en todos los demás puntos.

2. Consideremos la función $f(z) = \sin \theta$ para $z = r \operatorname{cis} \theta$ ($r > 0$), $f(0) = 0$. ¿Para cuáles valores de z es continua $f(z)$?

3. Si $f(z)$ es continua en z_0 y $z_n \rightarrow z_0$ ($n = 1, 2, \dots$), demostrar que $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$.

4. Demostrar el Teorema 9.08.

5. Completar la demostración del Teorema 9.09.

6. Demostrar el Teorema 9.14.

7. Para $z \neq 0$ sean $f_1(z) = (R1 z)/(1 + |z|)$, $f_2(z) = (R1 z)/|z|$, $f_3(z) = (R1 z)^2/|z|$, $f_4(z) = (R1 z^2)/|z|^2$, $f_5(z) = (R1 z)^2/|z|^2$. Para $z = 0$ sea cada función igual a cero. ¿Cuál de las cinco funciones es continua en $z = 0$?

8. En general, el número δ en la Definición 9.04 dependerá del punto a así como también de ε . Si en el dominio de definición D de $f(z)$, debe existir para cada ε positiva un número δ independiente del punto a en D tal que

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |z - a| < \delta,$$

entonces decimos que $f(z)$ es *uniformemente continua* en D . ¿Es $f(z) = e^{-1/|z|}$ ($z \neq 0$) continua en el dominio $0 < |z| < 1$? ¿Es uniformemente continua ahí?

9. Demostrar que si $f(z)$ es continua en una región cerrada con sus fronteras R , entonces es uniformemente continua en R .

10. Demostrar, de la definición, que ninguna de las siguientes funciones es diferenciable en ninguna parte:

$$(a) w = \bar{z}, \quad (b) w = R1 z, \quad (c) w = Im z.$$

11. Demostrar que $w = |z|^2$ es diferenciable sólo en $z = 0$.

12. Sea $w = x^2y(x + iy)/(x^4 + y^4)$ cuando $z \neq 0$, $w(0) = 0$. ¿Es diferenciable esta función en el origen?

13. Usar la prueba de Cauchy-Riemann para demostrar que ninguna de las siguientes funciones es diferenciable en ninguna parte:

$$(a) w = x, \quad (b) w = y, \quad (c) w = 3ix, \quad (d) w = ie^y$$

14. Demostrar que una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, diferenciable en una región R , debe ser constante en R si

$$(a) u = 0, \quad (b) v = 0, \quad (c) |f(z)| \text{ es constante,}$$

$$(d) \overline{f(z)} \text{ es diferenciable.}$$

15. Es costumbre formular la definición: Una función de simple valuación $f(z)$ es *analítica* en $z = z_0$ si y sólo si está definida y es diferenciable en todos los puntos de alguna vecindad de $z = z_0$. Demostrar que cada una de las siguientes funciones es diferenciable sólo en el punto indicado, y no es por lo tanto, por esta definición habitual, analítica en ninguna parte:

$$(a) w = x^2, (0, y), \quad (b) w = |z|^3, (0, 0),$$

$$(c) w = i \sin y, (x, n\pi + \pi/2).$$

CAPITULO 10

1. Discutir $\lim e^z$ cuando z se aproxima a infinito a lo largo de una de las ramas de la parábola $y = x^2$.

2. ¿Sobre qué curvas en el plano z son reales las funciones siguientes?

$$(a) e^z, \quad (b) \sin z, \quad (c) \cos z.$$

$$3. \text{ Calcular: } (a) e^{2+i}, \quad (b) e^{(3-\pi i)/2}, \quad (c) e^{1+3\pi i}.$$

$$4. \text{ Calcular: } (a) \sin(1 - 5i), \quad (b) \cos(5 - i), \quad (c) \sin(2 - 2i), \quad (d) \cos(2 - 2i).$$

$$5. \text{ Calcular: } (a) \operatorname{Log} 1, \quad (b) \operatorname{Log} i, \quad (c) \operatorname{Log}(-i), \quad (d) \operatorname{Log}(-1), \quad (e) \operatorname{Log}(1 + i\sqrt{3}).$$

$$6. \text{ Demostrar que } i^i \text{ es real.}$$

$$7. \text{ Demostrar que } e^z \text{ es imaginaria pura si y sólo si } y = (1/2 + k)\pi.$$

8. Demostrar que $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ y así demostrar que esta función no es analítica en ninguna parte.

9. Demostrar que:

- (a) $|\cos z|^2 = \cosh^2 y - \sinh^2 x = \cos^2 x + \sinh^2 y$,
- (b) $|\sin z|^2 = \cosh^2 y - \cos^2 x = \sin^2 x + \sinh^2 y$,
- (c) $\sinh|y| \leq |\cos z| \leq \cosh y$,
- (d) $\sinh|y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$.

10. Demostrar que $\cos z_2 = \cos z_1$ si y sólo si $z_2 = \pm z_1 + 2k\pi$.

11. Demostrar que:

- (a) $\cos \bar{z}$ y $\sec \bar{z}$ son diferenciables solamente en $z = k\pi$.
- (b) $\sin \bar{z}$ y $\csc \bar{z}$ son diferenciables solamente en $z = \pi/2 + k\pi$.
- (c) $\tan \bar{z}$ y $\cot \bar{z}$ no son diferenciables en ninguna parte.

12. Encontrar todas las soluciones z : (a) $\sin z = 1 - i$, (b) $\cos z = 5$.

13. Definir $\sinh z = (e^z - e^{-z})/2$, $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$. Demostrar que:

- (a) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$,
- (b) $d(\sinh z)/dz = \cosh z$, $d(\cosh z)/dz = \sinh z$,
- (c) $\sinh z$ y $\cosh z$ son periódicas con periodo $2\pi i$,
- (d) $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$,
- (e) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$.

14. Encontrar las curvas en el plano z sobre las cuales $\sinh z$ es real, y aquellas en las que $\cosh z$ es real.

15. Demostrar que:

- (a) $|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y = \cosh^2 x - \sin^2 y$,
- (b) $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y = \cosh^2 x - \cos^2 y$,
- (c) $\sinh|x| \leq |\cosh z| \leq \cosh x$,
- (d) $\sinh|x| \leq |\sinh z| \leq \cosh x$.

16. Demostrar que $\cosh z = 0$ si y sólo si $z = (1/2 + k)\pi i$, y que $\sinh z = 0$ si y sólo si $z = k\pi i$.

17. Definir $\tanh z = \sinh z / \cosh z$ y demostrar que $\tanh z$ tiene el periodo πi .

CAPITULO 11

1. Sea C_1 la línea recta desde $z = 0$ hasta $z = 1 + i$, C_2 la línea quebrada desde $z = 0$ hasta $z = 1$ y hasta $z = 1 + i$, C_3

el cuadrante desde $z = 0$ hasta $z = 1 + i$ del círculo de centro 1 y radio 1. Evaluar:

$$(a) \int_{C_3} x dz, \quad (b) \int_{C_1} y dz, \quad (c) \int_{C_2} y dz,$$

$$(d) \int_{C_3} y dz, \quad (e) \int_{C_1} z dz, \quad (f) \int_{C_3} z dz,$$

$$(g) \int_{C_1} \bar{z} dz, \quad (h) \int_{C_2} \bar{z} dz, \quad (i) \int_{C_3} \bar{z} dz.$$

2. Calcular (sin usar el Teorema de Cauchy) la integral

$$\int_C (z - z_0)^m dz,$$

donde, (a) m es un entero y C es un cuadrado con centro z_0 y lados paralelos a los ejes coordenados, (b) m es -1 o un entero par y C es una elipse con centro en z_0 y ejes paralelos a los ejes coordenados.

3. Calcular $\int (e^{iz}/z) dz$ a lo largo de las trayectorias siguientes: (a) la línea recta C_1 desde $z = r_1 > 0$ hasta $z = r_2 > r_1$, (b) el arco C_2 en el semiplano superior de $|z| = r_2$ desde r_2 hasta $-r_2$, (c) la línea recta C_3 desde $z = -r_2$ hasta $z = -r_1$, (d) el arco C_4 en el semiplano superior de $|z| = r_1$ desde $z = -r_1$ hasta $z = r_1$.

4. En el Problema 3, encontrar $\lim_{r_2 \rightarrow \infty} \int_{C_2} e^{iz} dz/z$.

5. En el Problema 3, encontrar $\lim_{r_1 \rightarrow 0} \int_{C_4} e^{iz} dz/z$.

6. Sea $f(z)$ continua para $|z - z_0| > r_0$ y supongamos que C_r denota al círculo $|z - z_0| = r$. Supongamos que $M(r)$ denota el máximo de $f(z)$ para $|z - z_0| = r$. Demostrar que si $rM(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow +\infty$, entonces $\int_{C_r} f(z) dz \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow +\infty$.

7. Sea $f(z)$ continua para $0 < |z - z_0| = r_0$. Demostrar, usando la notación del Problema 6, que si $rM(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$, entonces $\int_{C_r} f(z) dz \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$.

8. Supongamos que L_θ denota el radio del círculo unitario formando el ángulo θ con el eje real positivo. ¿Para cuáles valores de θ está definida la integral $\int_{L_\theta} e^{-1/z} dz$?

9. Encontrar, usando el teorema de la integral de Cauchy, $\int_C dz/(1+z^2)$, donde C es la circunferencia: (a) $|z| = 2$, (b) $|z - i| = 1$, (c) $|z + i| = 1$.

10. Demostrar la siguiente forma fuerte del Teorema de Morera: Si $f(z)$ es continua en un dominio D simplemente conectado, y si $\int_C f(z) dz = 0$ para cada contorno rectangular C en D teniendo lados paralelos a los ejes coordenados y diagonales menores que una $\varepsilon > 0$ dada, entonces $f(z)$ es analítica en D .

11. Encontrar los valores posibles de la integral $\int_C dz/(1+z^2)$, donde C es cualquier trayectoria desde $z = 0$ hasta $z = 1$ a lo largo de la cual el integrando es continuo.

12. Si $f(z)$ es continua en un dominio D , C es una curva regular de longitud L en D , y $|f(z)| \leq M$ sobre C , demostrar que $|\int_C f(z) dz| \leq ML$.

13. Para todas las trayectorias desde $z = a$ hasta $z = b$, demostrar que

$$\int_a^b (z - z_0)^n dz = [(b - z_0)^{n+1} - (a - z_0)^{n+1}]/(n+1),$$

donde n es cualquier entero positivo.

14. Para todas las trayectorias desde $z = a$ hasta $z = b$ y que no pasen por $z = z_0$, demostrar que

$$\int_a^b (z - z_0)^{-n} dz = [(b - z_0)^{1-n} - (a - z_0)^{1-n}]/(1-n),$$

donde n es cualquier entero mayor que 1.

15. Sea C un círculo y supongamos que $f(z)$ es continua dentro y sobre C y diferenciable dentro de C . Demostrar que

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

16. Sea $f(z)$ analítica en un dominio D simplemente conectado y sea C una curva cerrada regular en D . Demostrar que

$\int_C f(t) dt/(t - z) = 2\pi i f(z)$, o $= 0$, ya sea que z esté en el interior o en el exterior de C .

17. Sean $f(z)$ y $g(1/z)$ analíticas en un dominio D simplemente conectado que contiene el círculo unitario en sentido contrario al de las manecillas del reloj C : $|z| = 1$. Demostrar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\frac{f(t)}{t - z} + \frac{zg(t)}{zt - t^2} \right] dt$$

es igual a $f(z)$ para $|z| < 1$ y es igual a $g(z)$ para $|z| > 1$.

18. Sea $f(z)$ analítica en un dominio D simplemente conectado conteniendo el círculo en contra de las manecillas del reloj C ; $|z| = r$. Demostrar que, para z en C ,

$$\int_C \bar{z} f(t) dt/(t\bar{z} - r^2) = 0.$$

19. Demostrar que si $f(z)$ es analítica en un dominio D conteniendo $z = a$, y no es constante en D , entonces toda vecindad de $z = a$ contiene algún punto b en el cual $|f(b)| > |f(a)|$.

20. Demostrar el *teorema del módulo mínimo*: Si $f(z)$ es analítica y no cero en D y en su frontera C , donde C es una curva cerrada simple, entonces $|f(z)|$ llega a su mínimo sobre la frontera C , y no en su interior, a no ser que $f(z)$ sea constante.

Indice

— A —

$A^B (A \neq 0)$, 163
 Abierta, región, 117, 141
 Aislada, discontinuidad, 108, 123
 Aislado, punto, 139
 Algebra, teorema fundamental, de
 205, 211
 Amovible, discontinuidad, 107, 122
 Amplitud de un número comple-
 jo, 13
 Analítica, función, 117, 152
 Antilogía, 46
 Anular, dominio, 191
 Argumento de un número comple-
 jo, 13
 Armónica, función, 129
 Automorfa, función, 73

— B —

Bolzano-Weierstrass teorema de, 139

— C —

Caso loxodrómico, 61, 64
 Cauchy, teorema del valor medio
 de, 115
 Cero (s), de $f(z)$, 222
 de orden k , 23, 30, 222
 de un polinomio complejo, 22
 de una función racional, 30
 fronteras para valores absolu-
 tos, 24

Cerrada, región, 117
 Cerrado, conjunto, 139
 Circular región, 118
 transformación, 48, 50
 Circunscrito, conjunto, 139
 Cis, θ , 14
 Clase, C^n , 114, 123
 D^n , 114
 Conectada, región, 117
 Conectado conjunto, 141
 Conformante, función monogéni-
 ca, 80
 transformación bilineal, 48
 transformación circular, 50
 transformación de inversión, 46
 $z' = z^2$, 74
 Conjunto, circunscrito, 139
 cerrado, 139
 conectado, 141
 Conjunto armónico de puntos, 70
 ortocíclico de puntos, 70
 Continuidad, de polinomio comple-
 jo, 26
 en un punto, 106
 Continuo abierto, 141
 Cos z , 168
 Curva(s) equivalentes, 192
 regulares y regulares simples, 135

— D —

Dependiente variable, 98
 Derecha, vecindad de la, 101

Derivada(s),
 de una función compleja, 79, 149
 de una función real, 111, 113
 direccional, 126, 127
 parcial, 123
 Desigualdad de Cauchy, 206
 Diferenciales, 149
 Dirección, 126
 Direccional derivada, 126, 127
 Dirichlet, función, 100
 Discontinuidad, aislada y no aislada, 108, 123
 amovible, 122
 de salto, 107
 infinita, 107
 oscilatoria, 108
 Dominio, anular, 130
 de definición de una función real, 98, 118
 de una variable, 98
 definición, 141
 fronteras, 141

— E —

Ecuación diferencial de Laplace, 129
 Ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann, 129
 Eje de imaginarios, reales, 13
 Equivalentes, curvas, 192
 Esfera de Neumann, 34
 Expansión, de Maclaurin, 212
 de Taylor, 212, 214
 e^z , 160

— F —

Forma polar del número complejo, 14
 Fórmula de la integral de Cauchy, 197
 Frontera, inferior, 109
 superior, 109
 Fronteras de un dominio, 141
 Fronteras para valores absolutos de ceros de polinomio complejo, 24
 Función(es), A^B ($A \neq 0$), 163
 analítica, 117, 152

armónica, 129
 automorfa, 73
 compleja, (véase Función compleja)
 conjugada, 128, 156
 continua, 106, 108
 $\cos^{-1}z$, 176
 $\cos z$, 168
 de Dirichlet, 100
 diferenciable, 80
 e^z , 160
 holomorfa, 152
 límite, 101
 límite de la derecha, 101
 límite de la izquierda, 101
 límite en $\pm \infty$, 102
 logarítmicas, 160
 $\log z$, 160
 monogénica, 79, 152
 periódica, 73
 polinómicas, 19
 racional, 29
 real, véase Función(es) real(es)
 regular, 152
 $\sen z$, 168
 $\sen^{-1}z$, 169
 trigonométrica, 168, 169
 trigonométricas inversas, 169
 Función compleja, circunscrita, 146
 continua, 148
 diferenciable, 149
 límite, 145, 146
 Función de simple valuación, 93, 145
 Función inversa del coseno, superficie de Riemann, 176
 Función inversa del seno, 169
 superficie de Riemann, 170
 Función logarítmica, 160
 superficie de Riemann, 161
 valor principal, 161
 Función monogénica, 79, 152
 conformancia, 79
 Función racional, 29
 cero de orden, k , 30
 definición, 30
 grado, 30
 lo de orden k , 30
 Función real continua, 109

Función real de múltiple valuación, 98
 Función(es) real(es),
 analítica, 117
 armónica, 129
 circunscrita, 109
 conjugada, 128
 continua, 109
 continua a la derecha, 108
 continua en la izquierda, 108
 de dos variables, 117
 definición, 98
 diferenciable, 111
 dominio de definición, 98, 118
 gráfica, 98
 límite, 101, 118, 120, 122
 Funciones conjugadas, 128, 156
 Funciones trigonométricas, 165, 166
 Funciones trigonométricas inversas, 169

— G —

Goursat, teorema, 152
 Grado, de un polinomio, 19
 de una función racional, 30

— H —

Holomorfa, función, 152
 Homología, 40

— I —

Indefinida, integral, 189
 Independiente, variable, 98
 Infinita, discontinuidad, 107
 Integral, indefinida, 189
 lineal, 137, 138, 181
 Integral lineal compleja, 181
 Interior, punto, 141
 Intervalos numéricos, 97
 Invariante de una transformación bilineal, 56
 Involución de Möbius, 61, 64
 Izquierda, límite de la, 101
 vecindad de la, 101

— J —

Jordan, teorema de, 136

— L —

Lagrange, teorema del valor medio de, 116
 Ley de la media para dos variables, 123, 124, 125
 Límite, de función compleja, 145, 146
 de función real, 101, 119, 120, 122
 de la derecha, 101
 de la izquierda, 102
 punto, 138
 Línea de ramificación, 83
 Lineal, integral, 137, 138, 181
 Liouville, teorema, 204, 208, 219
 $\log z$, 160
 Log, z , 161

— M —

Máxima frontera inferior, 109
 Mínima frontera superior, 109
 Módulo de un número complejo, 13
 Módulo máximo, teorema del, 209, 210
 Morera, teorema de, 203

— N —

No aislada, discontinuidad, 108, 123
 Número(s) complejo(s), adición geométrica, 14
 amplitud, 13
 argumento, 13
 conjugado, 14
 definición, 12
 división geométrica, 18
 forma polar, 14
 módulo, 13
 multiplicación geométrica, 17
 representación geométrica, 13
 sustracción geométrica, 16
 valor absoluto, 13
 Números conjugados complejos, 14

— O —

Oscilatoria, discontinuidad, 108

— P —

Parcial derivada, 123
 Periódica función, 73
 Plano extendido complejo o de Gauss, 30
 Polinomio complejo, ceros, 22
 continuidad, 26-27
 definición, 19
 derivada k -ésima, 19
 fronteras para valores absolutos de ceros, 24
 grado, 19
 Polo de orden, k , 30
 Principio de la máxima, 208
 Proyección estereográfica, 33
 conformante, 36
 representación analítica, 34
 Punto, aislado, 139
 doble de transformación, 41
 en el infinito, 30
 fijo, 41, 55
 interior, 141
 límite, 138
 nodal, 81
 ramificación de, 81
 singular, 81
 Puntos críticos de una transformación conformante, 76, 78

— R —

Racional integral lineal, transformación, 39
 Real continua, variable, 98
 Recíproca (inversa), transformación, 46
 Rectangular, región, 118
 Región, 117, 141
 abierta, 117, 141
 cerrada, 117
 circular, 118
 conectada, 117
 rectangular, 118
 simple, 117
 simplemente conectada, 136
 Regular, curva, 135
 función, 152
 Regular simple, curva, 136
 Relación cruzada, definición, 68

invariancia durante una transformación bilineal, 71

Representación geométrica, de adición de números reales, 14
 de división de números complejos, 18
 de multiplicación de números complejos, 17
 de sustracción de números complejos, 16
 de un número complejo, 13
 Rolle, teorema de, 115

— S —

Salto, discontinuidad de, 107
 sen z , 169
 sen⁻¹ z , 169
 Simple región, 117
 Simplemente conectada región, 136
 Superficie de Riemann, definición, 81
 función inversa del coseno, 176
 función inversa del seno, 170
 función logarítmica, 161
 línea de ramificación, 83
 punto de ramificación, 81
 punto nodal, 81
 punto singular, 81

$$w = \sqrt[3]{\frac{z-a}{(z-c)^2}} + \sqrt{z-b},$$

$$a \neq b \neq c \neq a, 91$$

$$w^2 = z, 81$$

$$w^2 = (z-a)(z-b), a \neq b, 88$$

$$w^2 = (z-a)(z-b)(z-c), a \neq b_1, b \neq c = c_1 \neq a, 74$$

$$w^2 = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_n), a_i \neq a_j, 86$$

$$w^2 = (z-a)/(z-b), a = b, 83$$

$$w^3 = z, 83$$

$$w^3 = (z-a)(z-b), a \neq b, 86$$

$$w^4 - 2w^2(2z-a-b) + (a-b)^2 = 0, a \neq b, 89$$

$$w^6 = (z-a)^2(z-b)^3, a \neq b, 93$$

— T —

Teorema, de Bolzano-Weierstrass, 139
 de Goursat, 152
 de Jordan, 136
 de Liouville, 204, 208, 219
 de Morera, 203
 de Rolle, 115
 del módulo máximo, 209, 210
 del valor medio de Cauchy, 115
 del valor medio de Lagrange, 116
 de la integral de Cauchy, 187
 fundamental de álgebra, 205, 211
 Transformación, antilogía, 46
 bilineal, 47
 bilineal no parabólica, 56
 circular, 48
 de inversión, 42
 de punto doble, 41
 de punto fijo, 41
 homología, 40
 racional integral lineal, 39
 recíproca, 46
 $z' = z^2$, 74
 $z' = z^n$, n un entero positivo, 80
 Transformación de inversión, 42
 conformante, 46

Transformación(es) bilineal(es),
 caso elíptico, 60, 63, 66
 caso hiperbólico, 61, 63, 66
 caso idéntico, 61
 caso loxodrómico, 61, 64, 67
 clasificación de, 59
 conformante, 48
 definición de, 47
 invariante, 56
 involución de Möbius, 61, 64, 67
 no parabólica, 56
 parabólica, 56
 puntos fijos, 55 y siguientes

— U —

Unidad imaginaria, 13

— V —

Valor absoluto de una variable compleja, 13
 Variable, dominio de una, 98
 dependiente e independiente, 98
 real continua, 98
 Vecindad, de la izquierda y de la derecha, 101
 de $\pm \infty$, 101
 de un punto, 101, 117

